Memoria sobre aplicaciones a la determinación de posiciones geográficas

S.d.

Mémoire sur la lunette zénithale considérée dans ses applications à la détermination des positions géographiques par M. Yvon Villarceau.

I. Lorsque Mr. Faye proposa la lunette zénithale, je me livrai à des recherches sur la théorie de son instrument, et j'eus l'occasion de faire remarquer que non seulement on pouvait s'en servir pour déterminer les latitudes terrestres avec un haut degré de précision comme l'espérait son auteur, mais encore que le même instrument utilisé dans l'observation des passages permettrait d'obtenir les longitudes avec le même degré de précision qu'une lunette méridienne de même pouvoir optique. Toute la difficulté de l'emploi de la lunette zénithale était d'obtenir la position du zénith dans le plan focal de l'instrument, ou si l'on veut le lieu de l'image d'une étoile que l'on supposerait au zénith au moment de l'observation d'une étoile quelconque visible dans le champ de la lunette.

Depuis lors, un artiste connu Mr. Porro proposa un système qui selon lui devait résoudre la question mais aucune démonstration ne fut donnée à l'appui de cette assertion. En outre les conditions de l'emploi de l'instrument ne furent que vaguement spécifiées, en sorte qu'on pouvait s'exposer à perdre son temps en cherchant à faire la théorie d'un appareil qu'on n'était pas sûr de définir d'une manière conforme aux idées de son inventeur. Un simple aperçu suffisait pour éclaircir certains points, mais faisant inévitablement planer le doute sur d'autres. J'avais résolu de ne pas m'occuper du système de Mr. Porro, tant que je n'aurais pas pu me procurer des renseignements sur les conditions dans lesquelles devait fonctionner le nouveau système. Lorsque tout récemment j'appris que la lunette de Mr. Porro avait été employée à la détermination de la latitude de Paris au dépôt de la guerre, et avait fourni des résultats en harmonie avec ceux qui paraissent le mieux établis. La probabilité du succès obtenu me sembla évidente et je soumis à l'analyse le système proposé par Mr. Porro. L'objet du présent mémoire est de présenter la théorie de la lunette zénithale considérée dans ses applications à la détermination des positions géographiques et celle du système proposé par Mr. Porro, pour fixer la position du zénith au milieu des images des étoiles formées dans le plan focal de la lunette zénithale.

II. Nous supposerons que par un procédé quelconque on parvienne à déterminer le lieu du zénith dans le plan focal

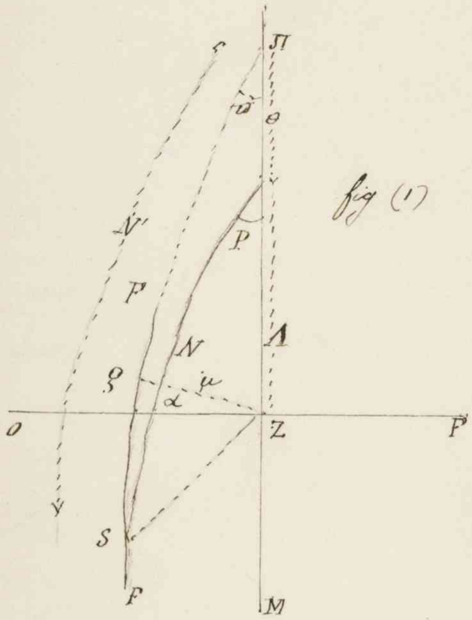


fig (1)

c-a-d le point où le vertical mené par le centre optique de l'objectif, percerait ce plan; et partant de cette donnée la théorie qui va être presentée s'appliquera aussi bien à la lunette de Mr Faye qu'à celle de Mr Airy ou au système de Mr Porro

Pour l'intelligence de ce qui va suivre, il suffira de se rappeler que la direction apparente d'une étoile est celle de la droite qui joint le centre optique de l'objectif et l'image de l'étoile produite dans le plan focal par la convergence des rayons qui ont traversé l'objectif.

Par le centre optique de l'objectif pris pour centre d'une sphère, menons deux plans verticaux suivant le méridien du lieu et le premier vertical. Ces plans détermineront sur la sphère deux grand cercles PM. OE se coupant au zénith Z.

Supposons qu'une étoile fasse son image en coincidence avec un fil horaire tendu dans le plan focal. Par le centre optique et le fil menons un plan qui coupe la sphère suivant le grand cercle FF dont le prolongement rencontre le méridien en Π à la distance θ au delà du pôle P sous l'inclinaison ϖ.

Soit S le lieu de l'étoile sur ce grand cercle

Concevons un fil parallèle aux fils horaires et mobile au moyen d'une vis micrométrique perpendiculaire à ces mêmes fils et soit $\mu = \rho Z$ la distance du fil FF au zénith Z mesurée à l'aide de cette vis.

Si nous imaginons une autre vis micrométrique dont l'axe soit parallèle aux fils horaires et conduisant un fil mobile perpendiculaire à ces dernières, on pourra pointer successivement à l'aide de ce fil l'étoile S et le zénith Z et la marche de la vis servira de mesure à l'axe $\rho S = \nu$

Nous devons supposer que le système des fils de réticule n'est pas exactement orienté et nous désignerons par α l'angle $OZ\rho$ que fait la perpendiculaire aux fils horaires avec la ligne Est-Ouest compté positivement vers le Nord.

La déviation α des fils est par construction une quantité constante pour les divers fils du réticule.

Joignons le lieu S de l'étoile avec le pôle P et désignons par P l'angle horaire SPZ de l'étoile compté positivement du méridien supérieur vers l'Ouest: l'angle P converti en temps sidéral est ce qu'il faut retrancher du temps t du passage observé de l'étoile par le fil FF pour obtenir le temps de son passage au méridien. (Nous verrons plus loin comment on tient compte de l'effet de la refraction sans calcul, en déterminant sa valeur en tours de vis au moyen des observations de passage des étoiles.

Enfin nous désignerons par

N la distance polaire SP de l'étoile

N' la distance $S\pi$

Λ la latitude PZ du lieu

III. On voit aisément que les angles α et μ suffisent à la détermination de la position du cercle qui représente le fil F. Ces quantités étant supposées données ainsi que la distance polaire N de l'étoile et l'angle mesuré ν, voici les formules rigoureuses à l'aide desquelles on pourrait obtenir les angles Λ et P qui représentent ici la latitude et l'heure ou la longitude

1°. La considération du triangle sphérique $\pi \zeta Z$ rectangle en Z fournit immédiatement les relations

$$(1)\quad \begin{aligned} \sin(\Lambda+\theta)\sin\varpi &= \sin\mu \\ \cos(\Lambda+\theta)\sin\varpi &= \cos\mu\sin\alpha \\ \cos\varpi &= \cos\mu\cos\alpha \end{aligned}$$

$$(2)\quad \begin{aligned} \sin(N'-\nu)\cos\mu &= \sin(\Lambda+\theta)\cos\varpi \\ \cos(N'-\nu)\cos\mu &= \cos(\Lambda+\theta) \end{aligned}$$

Les premières feront connaître $\Lambda+\theta$ et ϖ, les suivantes donneront $N'-\nu$: d'où N puisque ν est connu

2°. On aura dans le triangle πPS les relations

$$(3)\quad \begin{aligned} \cos N &= \cos\theta\cos N' + \sin\theta\sin N'\cos\varpi \\ \cos P\sin N &= \sin\theta\cos N' - \sin\theta\sin N'\cos\varpi \\ \sin P\sin N &= \sin N'\sin\varpi \end{aligned}$$

La première de ces équations étant résolue au moyen d'un angle auxiliaire fournirait aisément la valeur de θ tandis que les deux autres feront connaître P. Les angles $\Lambda+\theta$ et θ étant connus, Λ s'en déduira.

Telle est la solution rigoureuse du problème : mais il convient pour les besoins de la pratique de rechercher une solution plus simple :

On y parviendra aisément en négligeant dans les formules précédentes les quantités d'un ordre supérieur à celui des erreurs des observations

4. Nous considérons les quantités μ et α et ν comme étant du premier ordre de petitesse et nous proposerons de maintenir l'exactitude jusque dans les termes du 2^e ordre.

Les équations (1) montrent que ϖ est du premier ordre de petitesse, il s'ensuit qu'aux termes près du 3^{eme} ordre, on a

$$(4)\quad \begin{aligned} \varpi\sin(\Lambda+\theta) &= \mu \\ \varpi\cos(\Lambda+\theta) &= \alpha \end{aligned}$$

D'un autre côté on tire de la 3^{eme} équation (1) et de la 1^{ere} équation (2)

$$\sin(N'-\nu) = \sin(\Lambda+\theta)\cos\alpha = \sin(\Lambda+\theta) - \frac{1}{2}\sin(\Lambda+\theta)\,\alpha^2$$

on en déduit

$$N'-\nu = \Lambda+\theta - \frac{1}{2}\tang(\Lambda+\theta)\,\alpha^2$$

ou en vertu des équations (4)

(5) $$N' - V = \Lambda + \theta - \frac{1}{2}\xi\mu\alpha$$

La 1ère équation (3) peut s'écrire au même degré d'approximation:

$$\cos N = \cos(N'-\theta) - \sin N . \sin\theta \frac{\varpi^2}{2}$$

d'où:

$$N = N' - \theta + \frac{\sin N' \sin\theta}{\sin(N'-\theta)}\frac{\varpi^2}{2}$$

et plus simplement

(6) $$N = N - \theta + \frac{\sin(\Lambda+\theta)\sin\theta}{\sin N}\frac{\varpi^2}{2}$$

Or en multipliant la 1ère équation (4) par $\cos\Lambda$ et la 2e par $-\sin\Lambda$ et ajoutant, on trouve

(7) $$\varpi\sin\theta = \mu\cos\Lambda - \alpha\sin\Lambda$$

En vertu de cette valeur et de la 1ère équation (4) l'expérience de N devient

(8) $$N = N' - \theta + \frac{1}{2}\mu^2\frac{\cos\Lambda}{\sin N} - \frac{1}{2}\xi\mu\alpha\frac{\sin\Lambda}{\sin N}$$

ajoutant celle-ci membre à membre avec l'équation (5) et réduisant, il vient

$$N - V = \Lambda - \frac{1}{2}\xi\mu\alpha\left(1 + \frac{\sin\Lambda}{\sin N}\right) + \frac{1}{2}\xi\mu^2\frac{\cos\Lambda}{\sin N}$$

Cette expression dans laquelle Λ et N ne diffèrent que de quantités du 1er ordre peut se simplifier en négligeant seulement les quantités du 3ème ordre on en déduit:

(9) $$\Lambda = N - V + \xi\mu\alpha\sin 1'' - \frac{\xi\mu^2}{2}a + \Lambda\sin 1''$$

Ici on introduit le facteur $\sin 1''$ afin que les angles Λ, N, α, μ et V se trouvent simultanément exprimés en secondes d'arc.

La formule (9) servira à calculer la latitude Λ lorsque α sera connu; mais on aperçoit déjà que si l'on fait des mesures de V correspondantes à des valeurs de μ égales et de signe contraire, le terme $\xi\mu\alpha\sin 1''$ disparaîtra de la moyenne des valeurs du 2e membre de (9) appliqué aux observations d'une même étoile.

On préfère le plus souvent substituer à la quantité μ l'angle horaire P lorsqu'on connaîtra approximativement l'époque du passage de l'étoile par le méridien. A cet égard on tire de la 3e équation (3)

$$P = \varpi\frac{\sin N'}{\sin N}$$

ou en vertu de l'équation (6)

(10) $$P = \varpi\frac{\sin(N+\theta)}{\sin N}$$

Maintenant si l'on multiplie les équations (4) respectivement par $\cos(N-\Lambda)$ et $\sin(N-\Lambda)$, on aura:

$$\varpi\sin(N+\theta) = \mu\cos(N-\Lambda) + \alpha\sin(N-\Lambda)$$

Or $N-\Lambda$ est du 1er ordre de petitesse en vertu de l'équation (9)

Donc aux termes près du 3ème ordre, on a:

(11) $$P = \frac{\mu}{\sin N} + \alpha\frac{\sin(N-\Lambda)}{\sin N}$$

Le 2ème terme de cette expression est du 2ème ordre, en sorte que si on prend $\mu = P\sin N$ ou même $\mu = P\sin\Lambda$ pour substituer cette valeur dans les termes du 2ème ordre de l'équation (9) on ne négligera que des termes du 3ème ordre : on aura ainsi:

$$\Lambda = N - V + \alpha \sin\Lambda \sin 1'' P - \frac{1}{4} \sin 2\Lambda \sin 1'' P^2$$

Si l'on veut que P soit exprimé en secondes de temps sidéral, comme cela convient ici, il faut changer P en 15 P, ce qui donne

(12) $$\Lambda = N - V + \alpha \sin\Lambda \sin 15'' P - \frac{15}{4} \sin 2\Lambda \sin 15'' P^2$$

Et l'on voit encore qu'il suffira de faire des mesures de V pour des angles horaires égaux et de signes contraires deux à deux pour que le terme en α s'élimine de la moyenne.

On peut remarquer que les termes qui suivent V sont précisément les mêmes que l'on trouve dans la théorie du cercle mural pour tenir compte de l'inclinaison des fils et réduire les observations au méridien.

Soient maintenant:

t l'heure de la pendule à laquelle l'étoile a été observée passant au fil F

R le retard de la pendule à cet instant, de sorte que $t+R$ soit l'heure sidérale vraie du passage observé

R_0 le retard à une époque t_0

$\frac{dR}{dt}$ le retard par unité de temps

A l'ascension droite de l'étoile, ou l'heure du passage de l'étoile au méridien on aura:

(13) $$\begin{cases} R = R_0 + \frac{dR}{dt}(t - t_0) \\ A = t + R - P \end{cases}$$

Substituant la valeur précédente de R et ayant égard à l'équation (11), il viendra finalement

(14) $$A = t + R_0 + \frac{dR}{dt}(t - t_0) - \frac{\mu}{\sin N} - \frac{\alpha \sin(N-\Lambda)}{\sin N}$$

Équation qui servira à la réduction de l'observation du passage quand α sera connu. On voit encore que dans la détermination de R_0 au moyen de l'observation d'étoiles connues, on pourra à la rigueur éviter la détermination de α, si les étoiles sont distribuées à peu près symétriquement au nord et au sud du zénith, car le terme en α disparaîtra de la moyenne eu égard aux oppositions de signes des valeurs de $\sin(N-\Lambda)$

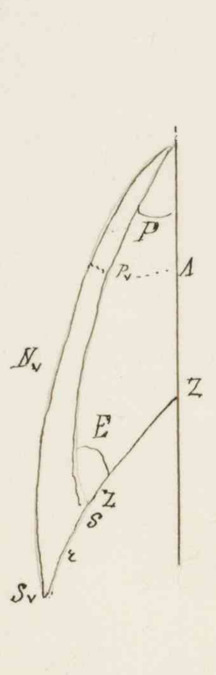


fig. (2)

Les formules (12) et (14) sont celles dont il s'agit de développer l'usage dans la détermination des positions géographiques à l'aide de la lunette zénithale. mais avant d'aller plus loin, il convient de fixer le rôle de la réfraction

Corrections pour la réfraction

IV Les formules établies dans le n° précédent sont celles qui conviendraient si l'atmosphère ne déviait pas les rayons lumineux: il va être facile d'en déduire celles qui conviennent au cas de la nature. Il suffira pour cela de convenir que les quantités Λ N et P définissent la direction du rayon lumineux dévié par la refraction, et de remplacer les deux premières de ces quantités par leurs valeurs en fonction des ascensions droites et des distances polaires vraies.

Soient donc Λ_v. N_v. P_v les coordonnées et l'angle horaire vrais de l'étoile et S_v fig. (2) son lieu vrai: le lieu apparent S sera situé sur le cercle vertical passant par le zénith Z et le lieu vrai S_v à une distance de ce dernier égale à la refraction et prise du coté de Z

Soient z la refraction $\overline{S_v S}$

Z la distance apparente ZS:

E l'angle à l'étoile dans le triangle PSZ

Nous aurons d'abord

$$\Lambda + P = \Lambda_v \text{ et } P_v \tag{15}$$

La considération du triangle sphérique $S_v PS$ fournit les relations

$$(16) \quad \begin{aligned} \cos N_v &= \cos N \cos z - \sin N \sin z \cos E \\ \cos(P_v - P) \sin N_v &= \sin N \cos z + \cos N \sin z \cos E \\ \sin(P_v - P) \sin N_v &= \sin z \sin E \end{aligned}$$

on a d'ailleurs dans le triangle SPZ

$$(17) \quad \begin{aligned} \cos Z &= \cos N \cos \Lambda + \sin N \sin \Lambda \cos P \\ \cos E \sin Z &= \sin N \cos \Lambda - \cos N \sin \Lambda \cos P \\ \sin E \sin Z &= \sin \Lambda \sin P \end{aligned}$$

Eliminons $\cos E$ entre la 1ère équation (16) et la 2ème équation (17) éliminons et $\sin E$ entre les deux dernières, il viendra:

$$\cos N_v = \cos N \cos z - \frac{\sin N \sin z}{\sin Z} \sin \Lambda \sin P$$

or en considérant Z comme une quantité du 1er ordre de petitesse, on peut poser aux termes près du 3ème ordre en z

$$z = a \tang \mathfrak{z}$$

$\underline{a}$ désignant la constante de la refraction: d'où

$$\frac{\sin z}{\sin \mathfrak{z}} = \frac{a \sin 1''}{\cos \mathfrak{z}}$$

mais $\underline{a}$ ou mieux $\underline{a \sin 1''}$ est une quantité du 1er ordre: il s'ensuit que z est du 2ème ordre. Substituant ces valeurs dans les expressions précédentes, il vient en négligeant les termes du 3ème ordre

$$\cos N_v = \cos N - a \sin 1'' \sin N \frac{\sin(N-\Lambda)}{\cos(N-\Lambda)}$$

$$P_v - P = a \sin 1'' \frac{\sin \Lambda}{\sin N_v} P$$

on a mis dans la première $\cos(N_v - N)$ à la place de $\cos \mathfrak{z}$ puisque d'après la 1re équation (17) ces quantités ne diffèrent que de termes du 2ème ordre

De ces équations on tire au degré convenu d'approximation

$$N_v = N + \alpha \tang (N - \Lambda)$$

$$P_v = (\Lambda + \alpha \sin 1'') P$$

La 1re montre que le terme correctif $\alpha\, tg\,(N_v - N)$ n'est autre chose que la réfraction calculée avec la distance zénithale méridienne prise avec le signe convenable. La seconde fait voir que les angles horaires vrais et apparents sont entre eux dans un rapport constant ou independants de la grandeur des angles horaires et de la distance polaire des étoiles.

En combinant la 2ème équation (13) avec l'équation (15), on trouve

$$A_v = t + R - P_v$$

relation evidente par elle même et dans laquelle il suffit de mettre pour R et P_v leurs valeurs (13) et (18). Faisant cette substitution et ayant égard à la formule (11), il vient

(19) $$\Lambda_v = t + R_0 + \frac{dR}{dt}(t - t_0) - \frac{\mu(1 + a \sin 1'')}{\sin N_v} - \frac{\lambda(1 + \lambda \sin 1'')}{\sin N_v} \sin(N_v - \Lambda)$$

On a mis N_v à la place de N attendu que d'après la 1re équation (18) ces quantités ne diffèrent que de termes du 2ème ordre

Quant à l'équation (12) elle devient en vertu de la 1re équation (18) et négligeant dans les termes du 2ème ordre la différence entre P_v et P

(20) $$\Lambda z N_v - \nu - \lambda\, tg\,(N - \Lambda) + \lambda \sin\Lambda \sin 15'' P_v - \frac{15}{4} \sin 2\Lambda \sin 15'' P_v^2$$

L'emploi de la formule (19) exigerait que les deux derniers termes fussent exprimés en secondes de temps, si l'on ne devait pas ultérieurement exprimés μ et λ en cette espèce d'unités.

Maintenant, il faut exprimer les angles μ et ν en parties de vis micrometrique

Soient K la valeur des tours de la vis Est Ouest en secondes de temps

v le nombre de tours de vis qui répond au fil ou a été observé le passage de l'étoile

v_z celui qui répond à la position du zénith dans le plan focal

Si nous supposons la tête de vis à l'Est et que les tours aillent en croissant lorsque le fil se rapproche de la tête de vis nous aurons en observant que les images sont renversées dans le plan focal $\mu = K(v - v_z)$

(21) Posons $\mu = K(1 + a \sin 1'')$ à la pression 0.76 à la température $+10°$ $1 + a \sin 1'' = 1.000283$

D'où

$$\mu = (1 + a \sin 1'') = Ka(v - v_z)$$

L'équation (19) deviendra en y supprimant desormais l'indice v pour abreger

(22) $$A = t + R_0 + \frac{dR}{dt}(t - t_0) + \frac{Ka(v_z - v)}{\sin N} - \frac{\lambda \sin(N - \Lambda)}{\sin N}$$

Nous avons réduit le facteur $1 + a \sin 1''$ à l'unité dans le dernier terme ce qui est evidemment permis et nous supposons que λ soit exprimé en secondes de temps.

Soit b la valeur des tours de la vis Sud-Nord exprimée en secondes de degrés, et supposons la tête de vis au Sud.

Designons par w la lecture faite en pointant l'étoile avec le fil porté par cette vis.

w_z la lectura de la même vis pointée sur le lieu du Zénith nous aurons

$$v = h\,(w_z - w)$$

et l'équation (20) en y supprimant également l'indice v deviendra

(23) $$\Lambda = N - a \tang (N - \Lambda) + h\,(w - w_z) - \alpha \sin\Lambda \sin 15'' P - \frac{15}{4} \sin 2\Lambda \sin 15'' P^2$$

Determination des constantes

V 1° valeur des tours de la vis micrometrique

Si cette valeur est donnée par l'observation de signaux disposés à égale distance sur une échelle graduée, K sera déterminé et l'on aura après l'avoir converti en secondes de temps

$$K_a = K\,(1 + a \sin 1'')$$

valeur qui servira dans la réduction des observations

Si l'on veut déduire K_a des observations astronomiques.

Soit t_i le temps du passage d'une étoile par le fil mobile situé dans la position v_i on a en vertu de (22)

(24) $$A = t_i + R_0 + \frac{dR}{dt}(t_i - t_0) + \frac{K_a (v_z - v_i)}{\sin N} - \frac{\alpha \sin (N - \Lambda)}{\sin N}$$

La combinaison de cette équation avec l'équation (23) donne

(25) $$0 = (t_i - t)\left(1 + \frac{dR}{dt}\right) - \frac{K_a}{\sin N}(v_i - v)$$

Deux valeurs correspondantes de t et de v suffiraient théoriquement pour déterminer $\frac{K_a}{\Lambda \sin N}$ et par suite K_a: mais un nombre plus considérable sera nécessaire et servira d'ailleurs pour constater le degré de régularité des pas de la vis.

Il est évident qu'on pourra prendre pour t la moyenne des valeurs de t_i, et v pour celle de v_i: il en résultera quelques simplifications dans les calculs.

La valeur de K_a étant déterminée par ce qui précède on en déduirait celle de K

(26) $$K = \frac{K_a}{1 + a \sin 1''}$$

Cette formule servira au calcul de la valeur des tours de la vis Nord Sud en la disposant momentanément pour observer des passages en ayant soin d'en placer la tête à l'Est: h_a designant la valeur de K_a obtenue dans cette circonstance, on aurait de même

$$h = \frac{h_a}{1 + a \sin 1''}$$

2° Réduction au fil moyen des observations de passage

Soient: t_m la moyenne des passages observés à l'ensemble des fils fillés

v_m la position du fil moyen

Si l'on suppose l'équation (22) écrite pour chacun des fils près et qu'on prenne le moyen de ces équations, on aura:

(28) $$A = t_m + R_0 + \frac{dR}{dt}(t_m - t_0) + \frac{K_a (v_z - v_m)}{\sin N} - \frac{\alpha \sin (N - \Lambda)}{\sin N}$$

et en soustrayant nombre à nombre l'équation (22)

$$0 = (t_m - t)\left(1 + \frac{dR}{dt}\right) - \frac{Ka\,(v_m - V)}{\sin N}$$

D'où:

$$t_m - t = \frac{Ka\,(v_m - V)}{\sin N\left(1 + \frac{dR}{dt}\right)}$$

Ce qui est la réduction cherchée

3°. Détermination de R_0. $\frac{dR}{dt}$ et α

On simplifiera les calculs en remplaçant N par Λ dans le dernier terme de l'équation (28): cette modification est évidemment permise puisque le terme est α qui est du 2^{eme} ordre de petitesse.

Ceci convenu, soit C une constante arbitraire dont nous disposerons pour rendre la quantité ρ ci-dessous la plus petite possible numériquement, l'équation (28) pourra s'écrire

$$A - t_m - \frac{Ka\,(v_z - v_m)}{\sin N} + C = R_0 + C + \frac{dR}{dt}(t_m - t_0) - \frac{\alpha}{\sin \Lambda}\left(\sin (N - \Lambda)\right)$$

posant

$$\rho = A - t_m - Ka\,(v_z - v_m) + C$$

$$x = R_0 + C$$

(30) $$y = \frac{dR}{dt}$$

$$z = -\frac{\alpha}{\sin \Lambda}$$

On aura simplement.

(31) $$\rho = x + (t_m - t_0)\,y + z \sin (N - \Lambda)$$

En expliquant cette équation à des étoiles connues au nombre de trois au moins, on obtiendra les valeurs de x. y et z: on aura ensuite:

$$R_0 = x - C$$

(32) $$\frac{dR}{dt} = y$$

$$-\alpha = z \sin \Lambda$$

Dans la détermination des longitudes par la voie du télégraphe électrique en enregistrant les observations au moyen d'une pendule unique $\frac{dR}{dt}$ sera connu par les observations faites dans la station principale, où az l'enregistrent et l'on n'aura plus que des inconnues à tirer des équations de la forme (31)

Nous rappelerons relativement à α que si l'on s'arrange de manière à observer des étoiles passant au Sud et au Nord de la station en nombre suffisant et convenablement reparties au Sud et au Nord, la moyenne des valeurs de $\sin. (N - \Lambda)$ sera extrêmement petite, et le terme en α n'aura pas d'influence sur la valeur de R_0 déduite de la moyenne d'un grand nombre d'observations dans lesquelles on ne tiendrait pas compte de ce terme: seulement il ne serait plus facile de se rendre compte de l'exactitude relative des observations, si la valeur de α était un peu sensible.

Les longitudes se déduiront comme on sait de la différence des valeurs de R_0 relatives à chacune des deux stations.

L'emploi de la formule (23) suppose l'angle horaire P connu et par suite l'état de la pendule. Nous rappelerons encore que le terme en αP s'éliminera de la moyenne des pointés de chaque étoile, si on a la précaution d'observer par des angles horaires égaux et de signes contraires deux à deux; condition qui peut être toujours réalisée avec une approximation suffisante. Au reste si l'on veut déterminer α par des observations d'une même étoile faites au fil Nord-Sud,

Voici comment on procédera

Posons

(33) $$u = b(w - w_z) - \frac{15}{4} \sin 2\Lambda \sin 15'' P^2$$

$$\xi = \alpha \sin \Lambda \sin 15''$$

et l'équation (23) pourra s'écrire

$$\Lambda = N - a \tan g (N - \Lambda) + u - \xi P$$

Soit u_m la valeur moyenne de u, P_m celle de P, on aura en retranchant l'équation moyenne

(34) $$0 = u - u_m - \xi (P - P_m)$$

La combinaison des valeurs absolues les plus grandes de P fournira plusieurs équations de la forme (34) d'où l'on déduira ξ et par suite

(35) $$\alpha = \frac{\xi}{\sin \Lambda \sin 15''}$$

Ceci suppose l'état de la pendule connu. Or l'état de la pendule pourra s'obtenir avec une suffisante exactitude pour les applications précédentes en transmettant des signaux de la station principale et faisant usage d'une valeur approchée de la longitude; si l'on ne préfère pas recourir à la résolution des équations propres à la détermination de R_x.

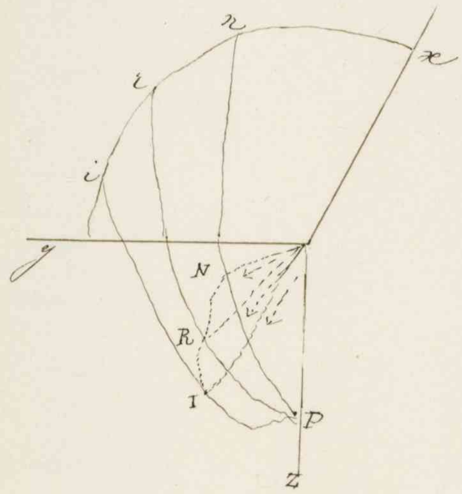
Si l'on peut, ce qui paraît praticable à un habile artiste M. Brunner, se procurer un micromètre muni de deux vis rectangulaires on pourra déterminer simultanément la longitude et la latitude. Dans le cas, où on ne pourrait employer qu'un micromètre à fil mobile unique, on serait obligé de déterminer successivement les deux coordonnées géographiques en faisant varier de 90° la portion du micromètre pour passer d'une détermination à l'autre.

VI Déviation des rayons lumineux par l'interposition sur leur trajet d'une suite de milieux homogènes séparés par des surfaces planes inclinées entre elles de quantités quelconques.

Par le point d'incidence O fig. (3) sur l'une des surfaces menons trois axes rectangulaires Ox. Oy. Oz et respectivement parallèles à trois axes de directions fixes

Du point O comme centre décrivons une sphère. Soient N.R.I les points où la direction de la normale à la surface de séparation de deux milieux contigus, celle du rayon refracté et celle du rayon incident perce la sphère.

fig (3)



Suivant les lois de la réfraction les trois droites ON. OR. OI sont dans un même plan. aussi les points N. R. I sont situés sur une même axe de gran cercle.

Menons par l'axe OZ et les points N. R. I trois plans qui déterminent sur la sphère les axes PN. PR. PI, et soient n. r. i les points ou ces axes coupent le plan de x. y

Achevons la construction des triangles sphériques PNI et PNR nous ferons

$V = \widehat{nx}$; $v = \widehat{ix}$: $v' = \widehat{rx}$

$\Theta = NP$: $\theta = IP$: $\theta' = RP$

$E = PNI$: $I = IN$: $I' = RN$

Nous désignerons ensuite par :

XYZ les cos. des angles que fait la direction de N avec les 3 axes

ξ, η, ζ les cos . . . . I -

ξ', η', ζ' - - - - - - - - - - - - - - R

Ceci posé nous aurons en appliquant au triangle PNI les trois formules fondamentales de la trigonométrie sphérique

$$\cos I = \cos\Theta \cos\theta + \sin\Theta \sin\theta \cos(v-V)$$

(a) $$\cos E \sin I = \sin\Theta \cos\theta + \cos\Theta \sin\theta \cos(v-V)$$

$$\sin E \sin I = \sin\theta \sin(v-V)$$

on a d'ailleurs par expression des cosinus XYZ. $\xi \eta \zeta$ en fonctions des coordonnées polaires

(b) $$X = \sin\Theta \cos V \qquad \xi = \sin\theta \cos v$$

$$Y = \sin\Theta \sin V \qquad \eta = \sin\theta \sin v$$

$$Z = \cos\Theta \qquad \zeta = \cos\theta$$

puis :

(c) $$\cos(v-V) = \cos v \cos V + \sin v \sin V$$

$$\sin(v-V) = \sin v \cos V - \cos v \sin V$$

Substituant ces valeurs dans les équations (a) après en avoir préalablement multiplié les deux dernières par $\sin\theta$, il vient :

$$\cos I = X\xi + Y\eta + Z\zeta$$

(d) $$\sin\theta \cos E \sin I = (X^2 + Y^2)\zeta - Z(X\xi + Y\eta)$$

$$\sin\Theta \sin E \sin I = X\eta - Y\xi$$

Les considérations du triangle PNR fournira des résultats parallèles : on pourra donc écrire leur calcul :

$$\cos I' = X\xi' + Y\eta' + Z\zeta'$$

d' $$\sin\theta \cos E \sin I' = (X^2 + Y^2)\zeta' - Z(X\xi' + Y\eta')$$

$$\sin\Theta \sin E \sin I = X\eta' - Y\xi'$$

actuellement l'équation de transmission des rayons lumineux est :

$$\frac{\sin I}{\sin I'} = \frac{n'}{n} = c$$

En indiquant par n n' la vitesse de la lumière dans le 1er et le $2^{ème}$ milieu et i l'indice de refraction. Nous l'avons comme il suit:

(e) $$n \sin I - n' \sin I' = 0$$

En vertu de cette relation, les secondes équations (d) et (d') donnent

$$0 = \left(\frac{X^2+Y^2}{Z}\right)(u'\zeta' - u\zeta) - X(u'\xi' - u\xi) - Y(u'\eta' - u\eta)$$

De même on a pour la $3^{ème}$ équation (d') combinée avec e

$$0 = -Y(u'\xi' - u\xi) + X(u'\eta' - u\eta)$$

Multipliant ces deux équations par X et Y, ajoutant et supprimant le facteur commun X^2+Y^2, il vient:

$$0 = \frac{u'\zeta' - u\zeta}{Z} X - (u'\xi' - u\xi)$$

on aurait de même en multipliant par +Y et −X

$$0 = \frac{u'\zeta' - u\zeta}{Z} Y - (u'\eta' - u\eta)$$

Ces deux équations peuvent se mettre sous la forme

(f) $$\frac{u'\xi' - u\xi}{X} = \frac{u'\eta' - u\eta}{Y} = \frac{u'\zeta' - u\zeta}{Z}$$

Designons par φ la valeur commune de ces rapports, nous aurons

(g) $$\begin{aligned} X\varphi &= u'\xi' - u\xi \\ Y\varphi &= u'\eta' = u\eta \\ Z\varphi &= u'\zeta' - u\zeta \end{aligned}$$

Multiplant ces équations par X. Y. Z et ajoutant nous aurons en vertu de la relation connue:

$$X^2+Y^2+Z^2=1$$

et des premières équations (d) et (d')

(h) $$\varphi = u' \cos I' - u \cos I$$

Cette relation donne la signification physique de la fonction φ; elle exprime l'accroissement de la vitesse de rayons lumineux suivant la normale commune aux deux surfaces: mais elle ne donne pas le moyen d'obtenir les directions des rayons émergents puisque I' est encore inconnu.

Ecrivons les équations (g) sous la forme:

(i) $$\begin{aligned} X\varphi + u\xi &= u'\xi' \\ Y\varphi + u\eta &= u'\eta' \\ Z\varphi + u\zeta &= u'\zeta' \end{aligned}$$

puis élevons au carré et ajoutons, nous aurons

$$\varphi^2 + 2u(X\xi + Y\eta + Z\zeta)\varphi + u^2 = u'^2$$

ou en vertu de la $1^{ère}$ équation: (d)

$$\varphi^2 + 2u\varphi \cos I = u'^2 - u^2$$

on en tire

$$\varphi = -u\cos I \pm \sqrt{u^2\cos^2 I + u'^2 - u^2} = -u\cos I \pm \sqrt{u'^2 - u^2 \sin^2 I}$$

Nous écrivons cette valeur sous la forme suivante.

(K) $$\varphi = -u\cos I + u'\sqrt{1 - \frac{u^2}{u'^2}\sin^2 I}$$

Le signe positif doit seul être appliqué dans cette expression attendu que cos I est essentiellement positif et que l'on doit

trouver $\varphi = 0$ lorsqu'on a $u' = u$ afin qu'il s'en suive $\xi' = \xi$
$\eta' = \eta$, $\zeta' = \zeta$.

Voici l'usage que l'on ferait de ces équations pour résoudre la question dans toute sa généralité. La 1^{ère} équation (d) ferait connaître l'angle d'incidence, l'équation (K) fournirait la valeur de la fonction φ et les équations (c) fourniraient la détermination des éléments d'émergence $\zeta' \eta' \xi'$

Ces éléments étant pris à leur tour pour des éléments d'incidence et ayant égard à la situation de la normale à la surface de séparation des deux milieux suivants, on obtiendrait de nouveaux éléments d'émergence. Poursuivant de la sorte, jusqu'à l'entrée du rayon dans ce dernier milieu on résoudrait rigoureusement le problème proposé.

Cas où les normales aux surfaces de séparation des milieux font entre elles et avec les rayons incidents des angles constamment très petits.

7. Nous supposerons que la direction des rayons incidents et celles des normales aux surfaces de séparation des milieux fassent avec l'axe des z des angles que nous considérerons comme étant du 1^{er} ordre de petitesse et pour fixer les idées, nous supposerons que le côté négatif de cet axe soit la direction du Zénith: Il s'ensuit que les angles de ces droites avec les axes des x et des y seront peu différents d'un angle droit et les cosinus de ces mêmes angles seront des quantités du 1^{er} ordre. Parallèlement les angles d'incidence seront des quantités du même ordre.

Ceci posé, si on néglige dans les deux premières équations (i) les quantités du 3^{ème} ordre, il faudra négliger dans la valeur de la fonction φ, celles du 2^{ème} ordre. Or à ce degré d'approximation l'équation K donne:

(l) $$\varphi = u' - u$$

et les deux premières équations (i) se réduisent à

(m) $$u'\xi' = u\xi + (u'-u)X$$
$$u'\eta' = u\eta + (u'-u)Y$$

Ces équations montrent que les rayons émergents font avec l'axe des z des angles de même ordre de grandeur que les rayons incidents.

Appliquons ces résultats aux rayons émergents, considérés comme incidents sur de nouvelles surfaces nous aurons relativement à l'axe des x par ex:

$$u'\xi' = u\xi + (u'-u)\,X$$

(o) $$u''\xi'' = u'\xi' + (u''-u')\,X$$

$$u'''\xi''' = u''\xi'' + (u'''-u'')\,X$$

$$u^{(i)}\xi^{(i)} = u^{(i-1)}\xi^{(i-1)} + (u^{(i)} - u^{(i-1)})\,X^{i-1}$$

En augmentant d'un accent les diverses quantités qui entrent dans ces équations. ajoutant, il vient :

$$u^{(i)}\xi^{(i)} = u\xi + (u'-u)X + (u''-u')X' + (u'''-u'')X'' + \ldots (u^{(i)}-u^{(i-1)})X^{i-1}$$

Nous pourrons poser

(p) $$a = (u'-u)X + (u''-u')X' + (u'''-u'')X'' + \ldots\ldots (u^{(i)}-u^{(i-1)})X^{(i-1)}$$
$$b = (u'-u)Y + (u''-u')Y' + (u'''-u'')Y'' + \ldots\ldots (u^{(i)}-u^{(i-1)})Y^{i-1}$$

et alors nous aurons

(q) $$u^{(i)}\xi^{(i)} = u\xi + a$$
$$u^{(i)}\eta^{(i)} = u\eta + b$$

Les quantités a et b sont des constantes dépendant uniquement de la nature des milieux et de la portion des surfaces de séparation mais nullement de la direction des rayons lumineux.

Considérons le cas où les milieux extrêmes sont l'air atmosphérique, or les milieux intermédiaires constituent un appareil optique

Nous aurons :

$$u^{(i)} = u$$

Les équations (q). deviendront

(s) $$\xi' = \xi + \frac{a}{u}$$
$$\eta' = \eta + \frac{b}{u}$$

En divisant par u remplaçant pour plus de simplicité l'accent (i) par l'accent i et ayant égard aux relations (b)

(t) $$\sin\theta' \cos V' = \sin\theta \cos V + \frac{a}{u}$$
$$\sin\theta' \sin V' = \sin\theta \sin V + \frac{b}{u}$$

Désignons actuellement par Θ et V' les coordonnées angulaires qui fixent la direction d'émergence d'un rayon incident parallèle à l'axe des Z il viendra en faisant $\theta = 0$ dans les équations précédentes.

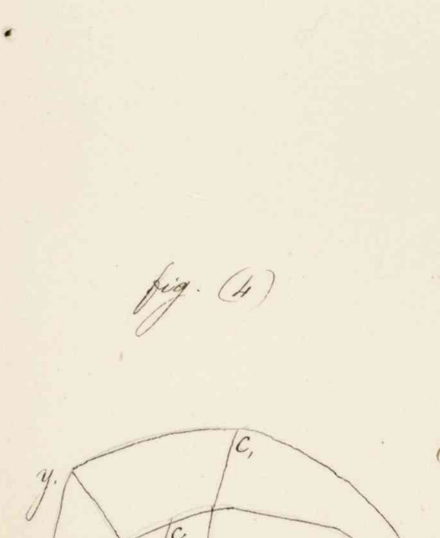
(u) $$\sin\Theta' \cos V' = +\frac{a}{u}$$
$$\sin\Theta' \sin V' = +\frac{b}{u}$$

et ces mêmes équations deviendront :

(v) $$\sin\theta' \cos V' = \sin\theta \cos V + \sin\Theta' \cos V'$$
$$\sin\theta' \sin V' = \sin\theta \sin V + \sin\Theta' \sin V'$$

Pour donner une interprétation géométrique de ces résultats, nous allons rapporter les coordonnées angulaires θ' et V' à un nouveau système de plans : à cet effet nous prendrons pour nouvel axe des Z la direction du rayon émergent $(V'\Theta)$ dont l'incidence était zénithale

fig. (4)



OS étant la direction du rayon émergent fig (4)

Soient : $$\overline{ZS} = \theta'$$
$$xc = V'$$

les coordonnées qui fixent la direction de ces rayons.

Prolongeons l'axe Z_1P d'une quantité égale à Θ, l'axe des y_1 sera situé au point ainsi déterminé : quant à l'axe des x, sa place sera dans le plan des xy à 90° du point P de telle sorte qu'on aura :

$$xx_1 = 90^\circ - V' = \psi$$

en désignant par ψ cette distance.

Pour rapporter la direction OS aux nouveaux axes, nous poserons

$$Z_1S = \theta'_1$$

$$x_1c_1 = V'_1$$

Formons actuellement les expressions des cosinus des angles que fait la direction OS avec les trois axes des xyz en fonction des cosinus des angles que fera la même droite avec les nouveaux axes et

Nous aurons

$$+\cos V'_1 \sin\theta'_1 \cos\psi + \sin V'_1 \sin\theta'_1 \cos\Theta' \sin\psi + \cos\theta'_1 \sin\Theta \sin\psi = \sin\theta' \cos V'$$

$$-\cos V'_1 \sin\theta'_1 \sin\psi + \sin V'_1 \sin\theta'_1 \cos\Theta' \cos\psi + \cos\theta' \sin\Theta' \cos\psi = \sin\theta' \sin V'$$

$$\sin V'_1 \sin\theta'_1 \sin\Theta' \quad + \cos\theta' \cos\Theta' = \cos\theta'$$

Relation dont la dernière est écrite seulement comme moyen de contrôle

Substituons dans la 1ère les valeurs V nous aurons à cause de

(w) $$V' = 90^\circ + \psi$$

et en ordonnant :

$$\sin\theta'_1(\cos V'_1 \cos\psi + \sin V'_1 \sin\psi \cos\Theta') + \cos\theta' \sin\psi \sin\Theta' =$$
$$= \sin\theta \cos V + \sin\psi \sin\Theta'$$

$$\sin\theta'(-\cos V'_1 \sin\psi + \sin V'_1 \cos\psi \cos\Theta') + \cos\theta' \cos\psi \sin\Theta' = \sin\theta \sin V + \cos\psi \sin\Theta'$$

d'où en séparant les termes des ordres supérieurs

$$\sin\theta'_1 \cos(V'_1 - \psi) - 2\sin\psi(\sin V'_1 \sin\theta'_1 \sin^2\tfrac{1}{2}\Theta' + \sin\Theta' \sin^2\tfrac{1}{2}\theta'_1) = \sin\theta \cos V$$

$$\sin\theta'_1 \sin(V'_1 - \psi) - 2\cos\psi(\sin V'_1 \sin\theta'_1 \sin^2\tfrac{1}{2}\Theta' + \sin\Theta' \sin^2\tfrac{1}{2}\theta'_1) = \sin\theta \sin V$$

or Θ' est de l'ordre de a et de b ou de 1er ordre en vertu des valeurs (k), θ'_1 est de l'ordre de θ ou de 1er ordre.

Donc en négligeant les quantités du 3ème ordre, on a :

(x) $$\sin\theta'_1 \cos(V'_1 - \psi) = \sin\theta \cos V$$
$$\sin\theta'_1 \sin(V'_1 - \psi) = \sin\theta \sin V$$

d'où l'on déduira à cause de $\sin\theta'_1$ qui est essentiellement positif

$$\left.\begin{array}{l} V'_1 - \psi = V \\ \text{ou } V'_1 = V + \psi \end{array}\right\} ; \quad \theta'_1 = \theta$$

Or $V + \psi$ est la valeur de V comptée de l'origine x d'où il suit que l'angle V_1 est égal à l'angle V compté de la même origine : on conclut de là et de $\theta'_1 = \theta$ que les directions relatives des différents rayons lumineux sont les mêmes après la sortie et avant leur entrée dans le système optique, que les rayons émergents ont la même direction qu'auraient les rayons incidents, si la calotte sphérique voisine du zénith avait tourné d'une seule pièce de l'angle Θ' autour d'un axe horizontal distant de l'axe des x dans le sens rétrograde d'une quantité $\varphi = 90° + V'$: les quantités Θ' et V' étant définies par les relations (u)

Si l'on observe que ces quantités sont du 3^{eme} ordre, un espace très petit peut être remplacé par un plan, l'énoncé précédent pourra être remplacé par celui-ci : les rayons émergents ont la direction qu'auraient les rayons incidents, si l'on transportait les points d'où ils émanent parallèlement entre eux d'une quantité Θ' dans la direction assignée par l'angle V'. or cette dernière proposition se démontre avec la plus grande facilité. En effet aux termes près du 3^{eme} ordre les équations V peuvent s'écrire

$$\theta' \cos V' = \theta \cos V + \Theta' \cos V'$$

$$\theta' \sin V' = \theta \sin V + \Theta' \sin V'$$

relations qui transformées en coordonnées rectilignes équivalent à

$$x' = x + p$$

$$y' = y + q$$

Donc les nouvelles coordonnées ne diffèrent des anciennes que par un transport de l'origine C.Q.F.D.

Application du système proposé par Mr Porro

VIII Mr Porro a proposé de placer au dessus de la lunette zénithale une capsule de verre dont la paroi du fond est fournie par une lame à faces planes que l'on dispose à peu près horizontalement ; cette capsule contient un liquide transparent et de pouvoir réfringent peu différent de celui du verre.

Supposons que l'on puisse compter sur l'homogénéité du verre, sur celle du liquide et sur la forme plane de la paroi du fond de la capsule, il est clair que la surface supérieure du liquide sera exactement horizontale si la couche liquide est suffisamment épaisse, et les normales aux surfaces de séparation des milieux feront avec la verticale des angles très petits.

Ainsi les résultats trouvés dans le n° précédent se réaliseront dans l'appareil de Mr Porro, c-a-d que les rayons venant des étoiles qui auraient traversé le système, conserveront à leur sortie les mêmes directions relatives qu'avait leur pénétration ; Les divers rayons émanés d'une même étoile émergeront parallèlement entre eux et seront admissibles dans la lunette zénithale comme s'ils n'avaient subi aucune réfraction : ils iront former une étoile dans le plan focal en une position déterminée par la direction de la droite menée du centre optique de l'objectif parallèlement à la direction commune des rayons émergents.

Il en sera de même pour toutes les étoiles visibles dans le champ de l'instrument, en sorte que l'image de la position du ciel visible lui sera exactement semblable.

Il reste à indiquer comment cet appareil permet de discerner la position du point zénithal au milieu des images des étoiles produites dans le plan focal.

Considérons un faisceau de rayons parallèles et verticaux, tels par ex. que celui qui émanerait d'une étoile située actuellement au zénith ses rayons tombant sur la surface supérieure du liquide seront en partie réfléchis et pénètreront en partie dans le liquide suivant une direction verticale: ces derniers rayons iront former une image dans le plan focal au point qu'il s'agit de déterminer. Supposons connue la position de ce point et qu'on y place un point éclairé, les rayons qui en émaneront traverseront l'objectif et suivront dans la capsule et le liquide, exactement le même chemin qu'ont suivi les rayons venus du zénith: ces rayons rencontreront donc normalement la surface supérieure: parvenus à cette surface, une partie des rayons sortira verticalement dans l'atmosphère, tandis que l'autre sera réfléchie normalement et comme la direction déterminée par la réflexion est la même que celle des rayons venus du zénith après leur pénétration dans le liquide, il est clair qu'ils suivront encore le même chemin; en sorte que les rayons réfléchis iront former une image dans le plan focal en un point qui sera précisément celui d'où ils étaient partis.

Il en résulte que le lieu du zénith dans le plan focal, est celui où doit être placé au point éclairé, pour que son image produite par la reflexion des rayons lumineux à la surface supérieure du liquide contenu dans la capsule coincide avec le point lumineux lui même.

La détermination de ce point se réalise physiquement au moyen de deux fils rectangulaires mobiles dans le plan focal que l'on éclaire convenablement pour cet objet. on fait mouvoir l'un des fils jusqu'à ce qu'il coïncide avec sa propre image. on opère de même avec le second et le lieu du zénith est à l'intersection des deux fils. toutefois nous ferons remarquer que l'emploi simultané des deux fils n'est jamais nécessaire

En réalité, il peut se produire trois images d'un même fil, par la réflexion sur les trois surfaces de séparation de milieux réfringents: mais on fait à peu près disparaître l'une d'elles, celle produite par la reflexion ou par la surface de la lame de verre qui touche le liquide, en choisissant comme l'a fait Mr Porro, un liquide d'un pouvoir réfringent peu différent de celui du verre: alors il ne reste que les deux images produites sur les surfaces en contact avec l'air. Or ces images se distinguent par une grande différence par l'intensité: pour savoir d'ailleurs laquelle des deux répond à la surface supérieure du liquide, il suffirait d'agiter un peu celui-ci en soufflant dessus, on verrait alors l'image se déplacer ou même disparaître, tandis que l'autre persisterait sans déplacement.

IX Des avantages et inconvénients de la lunette zénithale

L'étude que nous avons présentée de la réduction des observations faites à la lunette zénithale nous permet d'établir les avantages que semble présenter l'emploi de cet instrument. Les seuls éléments de réduction dépendants de l'appareil sont les énormes micrométriques faites à l'aide des fils mobiles. Nous devons admettre que l'appareil micrométrique soit aussi parfait que ceux que l'on adapte aux autres instruments astronomiques. Or les mesures faites avec l'appareil micrométrique sont de 3 sortes: elles servent à déterminer les positions des fils horaires, celles des étoiles en distance polaire et aussi à fixer la position du point zénithal: les deux premières genres de mesure auront aussi le même degré de précision que celles obtenues dans les observations avec des instruments de même puissance optique. Quant au troisième, la précision dépendra du mode d'éclairage des fils de la transparence et de l'homogénéité des milieux réfringents, la tranquillité du liquide contenu dans la capsule. Si l'on suppose l'instrument établi dans de bonnes conditions sous ces différents rapports, et que l'on multiplie convenablement les pointés, on pourra compter sur une bonne détermination du point zénithal: alors la seule condition que devra remplir l'instrument pour fournir des indications exactes sera que le lieu du zénith soit constant pendant une série d'observations, ou que s'il varie, ses variations soient assez régulières pendant de certains intervalles de temps pour que durant ces mêmes intervalles, on puisse sûrement déduire par voie d'interpolation le lieu du zénith correspondant à chaque observation d'étoiles. Ceci est une question de stabilité embrassant à la fois le système réfringent supérieur, l'objectif, l'appareil micrométrique et les supports de ces mêmes appareils. On remarquera d'abord qu'il y aura tout avantage à fixer l'objectif et la cavité du système réfringent supérieur sur un même barillet, en sorte que le nombre des supports de l'instrument se trouve réduit à deux. Or si l'on suppose l'instrument établi dans une localité où les trépidations du sol produites par les voitures ne se fassent pas sentir, qu'on n'opère pas par un vent trop fort et que l'on prenne des précautions convenables pour que le poids de l'observateur et de son assistant n'imprime aucun déplacement au fil sur lequel reposent les supports de l'instrument, les changements relatifs de position des appareils, seront dus principalement aux changements de température et à des mouvements du sol qui seront généralement très lents : en sorte que la position du Zénith déterminée à des intervales de temps suffisament rapprochés et que l'expérience indiquera pour chaque localité, pourra toujours être considérée comme susceptible de se prêter à une interpolation exacte.

Dans de telles conditions la lunette Zénithale doit être considérée comme un instrument exempt de toute espèce d'erreurs; les erreurs qui pourront affecter les observations, se réduiront aux erreurs ordinaires d'observations qui sont personnelles aux observations et aux erreurs accidentelles provenant de l'état variable des couches atmosphériques. L'effet de ces erreurs sera obtenir en ce qui concerne les latitudes par la multiplicité des observations. mais à l'égard des longitudes, il faudra en outre appliquer le mode d'échange entre les observateurs des deux stations pour éliminer la partie des erreurs personnelles que l'on regarde comme constantes pour chaque observateur.

Dans l'application de la lunette Zénithale à la détermination de la position géographique d'une station, on doit admettre que l'on ait fait choix à l'avance d'un certain nombre d'étoiles observables près du Zénith de cette station, et qu'on en détermine avec soin les coordonnées équatoriales avec les instruments méridiens établis dans la station principale et qu'en outre les observations des passages méridiens se fassent simultanément dans les deux stations et soient enregistrés électriquement sur un même appareil enregistreur. alors le pouvoir optique de la lunette Zénithale est au moins égal à celui des instruments méridiens de la station principale, il sera admissible que les coordonnées géographiques obtenues auront toute la précision des coordonnées astronomiques fournies par les instruments méridiens précédents. Or la précision des coordonnées des étoiles atteint déjà une limite que les conditions atmosphériques ne semblent pas permettre de dépasser. on obtiendrait donc les coordonnées géographiques définitives de chaque station et il suffirait pour cela d'employer un appareil ayant la puissance optique des grands instruments méridiens.

S'il s'agissait d'instruments astronomiques tels qu'une lunette méridienne et au cercle vertical, l'emploi des instruments puissants dans les stations serait tout à fait impraticable (+) tandis que l'emploi et le transport d'une puissante lunette zénithale ne semblent offrir aucune difficulté. En effet on peut concevoir une telle lunette comme consistant essentiellement en trois parties distinctes à l'appareil réfringent supérieur, l'objectif et l'appareil micrométrique. Or si l'on se restraint aux dimentions les plus grandes dont on ait fait usage pour les instruments méridiens, le transport de ces objets n'offrira nulle part la moindre difficulté: quand à leur installation, il suffira d'un mur ayant quelques mètres de hauteur, si l'on ne préfère même employer un support à trépied de bois: à peine est-il necessaire d'ajouter que l'objectif et le système micrométrique devront être simplement réunis par un tuyau de matière flexible (toile caoutchouc) qui n'occasionne aucune difficulté de transport, et servira uniquement à protéger l'appareil micrométrique contre les matières légères qui flottent dans l'atmosphère. La détermination d'une position géographique pourrait se faire en très peu de temps, si les instruments de la station principale pouvaient jouir des mêmes avantages que la lunette zénithale: car s'il est nécessaire avec ces instruments de multiplier les observations; c'est bien plus dans le but d'éliminer les erreurs instrumentales que dans celui d'atténuer l'effet des erreurs d'observation. Pour tirer tout le parti possible de la lunette zénithale dans la détermination d'un système de positions géographiques, il conviendrait de partager la contrée en zônes par des parallèles de latitude, et de déterminer les longitudes des divers points d'un même parallèle par rapport à l'un d'entre eux, en faisant usage des lunettes zénithales. Celui-ci serait alors relié à l'station principale où l'on emploierait les instruments méridiens.

(+) Note. Si on voulait atteindre une très grande précision avec des instruments méridiens transportés dans les stations, on devrait déterminer les coefficients de la réfraction qui conviennent à chaque localité, pour tenir compte autant que possible d'influences locales que l'on n'a pas encore fait figurer dans les formules de réfraction, et qu'il serait très difficile d'apprécier. L'emploi de la lunette zénithale ne nécessite pas de telles précautions.

Faisons remarquer en passant que l'on devrait établir la station principale au point de la contrée dont il s'agit qui serait le plus voisin de l'Equateur. En effet avec des instruments d'égale précision, l'erreur sur la détermination de la direction du méridien d'un lieu, sera toujours en raison inverse des cosinus de la latitude de ce lieu; et comme la différence de longitude des deux lieux est affectée d'une erreur égale à la différence algébrique des erreurs commises dans la détermination de leurs méridiens, on voit que la différence de longitude de deux lieux voisins, déduites de leurs longitudes rapportées à une station principale, beaucoup plus éloignée de l'équateur, pourrait présenter de fortes erreurs qu'on ne rencontrerait pas, si la station principale n'était pas plus éloignée de l'équateur que chacun d'eux. Dans le cas où l'on procèderait de la sorte, il ne serait plus nécessaire de déterminer les coordonnées astronomiques dans la station principale: ces coordonnées pourraient être déterminées dans tout observatoire de premier ordre.

Nous venons d'énumérer les avantages de la lunette Zénithale, nous devons essayer d'en découvrir les inconvénients, afin d'y parer autant que possible.

Tout d'abord, on reconnait que le nombre des étoiles observables près du Zénith, sera nécessairement limité et ~~très~~ restreint, si l'on ne veut pas observer les étoiles de 7^e 8^e grandeur; or nous avons déjà reconnu que le grand nombre des étoiles fort de son importance, en ce qui concerne la lunette Zénithale.

L'interposition de la capsule et du liquide qu'elle renferme diminuera l'intensité des images: mais on obvierait facilement à cet inconvénient en employant des objectifs à plus grande ouverture, qui ne présenteraient d'autres désavantages sérieux qu'une certaine augmentation de prix.

Le fond de la capsule n'étant pas absolument liquide pourrait prendre une certaine courbure sous l'influence de son propre poids et de celui du liquide: il ne serait pas nécessaire de donner à la lame de verre une grande épaisseur pour rendre le défaut à peu près insensible: d'ailleurs il n'aurait d'autre résultat que de former avec l'objectif un nouveau système optique dont le foyer différerait un peu du précédent et offrirait des images peut être un peu moins nettes: il va sans dire qu'il faudrait alors employer des observations astronomiques faites avec l'instrument complet pour déterminer les valeurs des tours de vis micrométriques. Quant au défaut de netteté des images, il n'a pas d'autres inconvénients dans l'observation de faibles étoiles avec des fils qui ont nécessairement une épaisseur sensible. Une légère dilatation des images est dans ce cas là avantageuse. L'expérience montrerait sans doute que les difficultés que nous soulevons ici ne sont nullement à redouter.

Nous avons supposé planes les surfaces qui forment le fond de la capsule, et homogène la matière de celle-ci. L'inexactitude serait facile à constater de diverses manières et quant aux observations elles mêmes, elles devraient présenter des erreurs égales et de signes contraires pour des positions de la capsule, différents de 180 en azimuts d'où découle nécessairement le moyen de les éliminer. Il va sans dire que nous supposons ici une très légère erreur de forme dans ces surfaces et d'homogénéité dans la matière.

La surface supérieure du liquide doit être horizontale: pour y parvenir à résultat dans le cas général où la lame de verre ne sera pas elle même exactement horizontale, il sera nécessaire d'employer une couche liquide assez épaisse pour que l'action de la capillarité exercée par les différents points du fond de la capsule ne se fasse pas sentir à la surface du liquide.

Le liquide doit être d'ailleurs homogène: on peut craindre que les changements de température n'amènent des variations dans le pouvoir réfringent des différentes parties de la masse liquide.

Ces effets seraient effectivement à redouter, si l'épaisseur de cette masse devait être un peu considérable: il est possible cependant qu'il se produise des perturbations de cette nature avec des épaisseurs qui ne dépassent pas celle qu'exige l'horizontalité de la surface libre. Pour les mettre en évidence, il suffira de lui réserver un moyen d'agiter le liquide sans agiter la capsule elle même, et de comparer les positions du Zénith obtenues avant et après l'opération. L'expérience réitérée apprendrait sans doute dans des cas déterminés quelle devrait être la fréquence de cette manœuvre pour mettre les observations à l'abri de la source d'erreurs que nous venons de mentionner.

L'obstacle qui nous semble le plus contraire à l'emploi de la lunette Zénithale est l'action du vent. Cette action peut avoir deux effets très distincts: 1.° d'empêcher les observations et particulièrement la détermination du point Zénithal, en rendant la réflexion et la réfraction régulières impossibles. 2.° de produire une inclinaison permanente de la surface du liquide sans empêcher les observations. Le premier effet se fera particulièrement sentir par les vents forts, le second pourra être produit par des vents modérés et même faibles. Le moyen qui s'offre de parer à ces inconvénients est le même dans les deux cas. Il consiste à abriter le liquide par un tuyau extérieur convenablement disposé et fixé non à la capsule, mais à la charpente extérieure de la construction qui doit abriter l'observateur lui même. Ce moyen pourra bien ne pas réussir toujours dans le premier cas : mais alors il est clair qu'il faudra remettre les observations à un moment plus favorable.

De l'énumération des avantages de l'emploi de la lunette zénithale comparés aux inconvénients que l'on peut prévoir tout d'abord nous semble résulter l'importance qu'il y aurait à faire une étude expérimentale de cet instrument. L'expérience indiquerait bien vite les perfectionnements à apporter à l'appareil pour qu'il put fonctionner sans perdre aucun de ses avantages dans toutes les circonstances où l'on pourrait songer à employer des instruments d'un autre genre.
