R 518

DT3/3

Eclipses de Sol para la Tierra en general

s.d.

Eclipses de Sol para la Tierra en general.

(1.ª parte).

Eclipses de sol.

Eclipse de sol para la tierra en general.

Hallar con exactitud la hora de la conjuncion en longitud = δ.

Designemos por h la que se inserta en el almanaque náutico, y que es tan aproximada, que solo podrá diferir de la exacta en dos ó tres segundos cuando mas; por $(h+z)$ la hora exacta δ de la conjuncion, y supongamos á z expresada en segundos de tiempo.— Calcúlense con todo rigor para la hora h

λ = longitud de la luna.

$\frac{d\lambda}{dh}$ movimiento horario en longitud del mismo astro.

$\odot$ = longitud del Sol

y $\frac{d\odot}{dh}$ = movimiento horario del sol en longitud.

por las fórmulas espuestas en el expediente de los eclipses de luna.

Con estos datos se tiene

$$\left.\begin{array}{l}\text{longitud de la luna á la hora } (h+z) = \lambda + z.\frac{1}{3600}.\frac{d\lambda}{dh} = \lambda + A.z \\ \text{longitud del sol á la hora } (h+z) = \odot + z.\frac{1}{3600}.\frac{d\odot}{dh} = \odot + B.z\end{array}\right\}$$

de donde se deduce por una simple sustraccion

$$o = (\lambda - \odot) + z(A - B)$$

$$z = \frac{\odot - \lambda}{A - B} \text{ en segundos de tiempo,}$$

con lo que se obtendrá $\delta = h + z$.

Se sustituirá el valor de z en las espresiones de donde se ha deducido, y se obtendrán con toda exactitud las longitudes del sol y de la luna á la hora $(h+z) = \delta$, lo que servirá de comprobacion, pues deben ser iguales.

Las cantidas λ y $\odot$ se obtendrán al décimo de segundo; las $\frac{d\lambda}{dh}$ y $\frac{d\odot}{dh}$ al milésimo de segundo, y la z al décimo de segundo de tiempo.

Límites de posibilidad.

Designemos por P — „ la paralaxe horizontal ecuatorial de la luna para la hora de la conjuncion δ.

P' — „ la paralaxe horizontal en la latitud de 45° que será $= \rho . P$, siendo $\log \rho = 9{,}99929$.

π — „ la paralaxe horizontal ecuatorial del sol.

$\underline{s}$ — „ el semidiámetro central de la luna.

σ — „ el semidiámetro central del sol.

La espresion de la distancia geocéntrica entre los centros del sol y de la luna en el momento del contacto de ambos astros es

$$\mathcal{D} = (P' - \pi) + (\sigma + s)$$ — „ Santini, tomo I, pág. 199;

de donde se deduce, con los valores dados en la pág. 54 de las adiciones al almanaque náutico inglés para 1836,

Máximo valor de $\mathcal{D} = 1^\circ.\ 34'.\ 28''$

Mínimo valor de $\mathcal{D} = 1^\circ.\ 22'.\ 50''$

Valor medio de $\mathcal{D} = 1^\circ.\ 28'.\ 39''$.

Para que se verifique un eclipse de sol es preciso que la latitud β de la luna en el momento de la conjuncion geocéntrica tenga un valor que no exceda del dado por la expresion

$$\beta' = \frac{\mathcal{D}}{\cos \iota}$$ — „ Santini, tomo I, pág. 199,

representando $\underline{\iota}$ la inclinacion de la órbita relativa de la luna cuyo valor se deduce de la expresion de $\tan \underline{\iota}$ dada en el expediente de los eclipses de luna.

Con los valores medios de $\underline{\mathcal{D}}$ y de $\underline{\iota}$ se halla

Valor medio de $\beta' = 1^\circ.\ 29'.\ 5'' =$ valor medio de $\underline{\mathcal{D}} + 26''$;

y aproximadamente

$$\left.\begin{array}{l} \text{máximo valor de } \beta' = \text{máximo valor de } \underline{\mathcal{D}} + 26'' = 1^\circ.\ 34'.\ 54''. \\ \text{mínimo valor de } \beta' = \text{mínimo valor de } \underline{\mathcal{D}} + 26'' = 1^\circ.\ 23'.\ 16''. \end{array}\right\};$$

tendrémos, pues, en general, para que resulte eclipse,

$$\beta < \mathcal{D} + 26'' \quad \text{ó bién} \quad \beta < (P' - \pi) + (\sigma + s) + 26''.$$

Designando por $\underline{d}$ la distancia de la luna al nodo de su órbita en el momento de la conjuncion, y por i la inclinacion de su órbita verdadera sobre la eclíptica, se tiene

$$\sin d = \frac{\sin \beta}{\sin i};$$

por consiguiente el máximo valor de $\underline{d}$, en el momento de la conjuncion, estará dado por la fórmula

$$\sin d = \frac{\sin 1^\circ.\ 34'.\ 54''}{\sin 5^\circ.\ 8'.\ 44''},$$

empleando el valor medio de la inclinacion i.

La expresion anterior dá

$$\text{máximo valor de } d = 17^\circ.\ 55'$$

que es la mayor distancia á que la luna, en el momento de la conjuncion puede hallarse del nodo de su órbita.

De lo expuesto se deduce

1°. Que la máxima distancia geocéntrica posible entre los centros del sol y de la luna en el momento del contacto es $= 1^\circ.\ 34'.\ 28''$.

2°. Que el máximo valor posible de la latitud de la luna, en el momento de la conjuncion geocéntrica, debe ser, para que haya eclipse de sol, $= 1^\circ.\ 34'.\ 54''$.

3°. Que en el momento de la conjuncion geocéntrica, la mayor distancia posible de la luna al nodo de su órbita, debe ser, para que haya eclipse de sol $= 17^\circ.\ 55'$.

El lugar del nodo, de que aquí tratamos, es el verdadero que puede diferir considerablemente del lugar medio.

4°. Que un eclipse de sol será $\left\{\begin{matrix}\text{seguro}\\ \text{imposible}\end{matrix}\right\}$ cuando, en el momento de la conjuncion, la latitud de la luna β sea numéricamente $\left\{\begin{matrix} < 1^\circ.\ 23'.\ 16'' \\ > 1^\circ.\ 34'.\ 54'' \end{matrix}\right\}$. — Entre estos límites el eclipse es dudoso; pero la incertidumbre se desvanece teniendo presente que la latitud β de la luna en el momento de la conjuncion debe ser, para que pueda haber eclipse de sol,

$$< (P' - \pi) + (\sigma + s) + 26''.$$

Me parece que, en vez de hacer uso de estos límites, es mas seguro, aunque un poco mas largo, calcular con todo rigor para la hora de la conjuncion o, las cantidades

β „ latitud de la luna

$\frac{d\lambda}{dh}$ „ movimiento horario de la luna en longitud

$\frac{d\beta}{dh}$ „ movimiento horario de la luna en latitud

$\frac{d\odot}{dh}$ „ movimiento horario del sol en longitud

P „ paralaxe horizontal ecuatorial de la luna

P' „ paralaxe horizontal de la luna en la latitud de $45^\circ = \rho.\ P$.

π „ paralaxe horizontal del sol.

s „ semidiámetro central de la luna.

y σ „ semidiámetro central del sol.

Con estos elementos se obtendrá á

$$\mathcal{D}=(P'-\pi)+(\sigma+s)\ ; \quad \tan\iota=\frac{\frac{d\beta}{dh}}{\frac{d\alpha}{dh}-\frac{d\odot}{dh}}\ ;$$

$$\beta'=\frac{\mathcal{D}}{\cos\iota}\ ;$$

y el eclipse será $\left\{\begin{matrix}\text{seguro}\\ \text{imposible}\end{matrix}\right\}$ si β es numéricamente $\left\{\begin{matrix}<\beta'\\ >\beta'\end{matrix}\right\}$.
Si $\beta=\beta'$ el eclipse se reducirá á un simple contacto.

Cálculo del eclipse para la tierra en general.

Determinar con exactitud la hora de la conjuncion en ascension recta $=\mathcal{O}$

Una sencilla interpolacion dará las ascensiones rectas del sol para de 6 en 6 horas, que se interpolarán para de hora en hora tan solo en aquel intérvalo de 6^h dentro del cual se ha de verificar la conjuncion, lo que se conoce por la simple inspeccion de las efemérides.
Fórmese una nueva serie que dé para de hora en hora las diferencias $(\alpha-\alpha')$=(ascension recta del sol _ ascension recta de la luna); designemos por $\mathcal{D}$ el último valor positivo de la diferencia $(\alpha-\alpha')$; por t^s el intérvalo en segundos de tiempo que debe mediar entre la hora $\mathcal{O}$ de la conjuncion en ascension recta y la hora de t. m. H á que corresponde la diferencia $\mathcal{D}$; y tendrémos

$$0=\mathcal{D}+x\,\tfrac{1}{2}(\Delta'_{-1}+\Delta'_{+1})+x^2\tfrac{1}{2}\Delta^2_0$$

expresion enque

$$x=\frac{t^s}{3600^s}.$$

De lo que precede se deduce

$$x^2+x\,\frac{\Delta'_{-1}+\Delta'_{+1}}{\Delta^2_0}+\frac{2\mathcal{D}}{\Delta^2_0}=0\ ;$$

y haciendo

$$\frac{\Delta'_{-1}+\Delta'_{+1}}{\Delta^2_0}=p, \qquad \frac{2\mathcal{D}}{\Delta^2_0}=q$$

resulta

$$x^2+px+q=0,$$

de donde se deduce

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}\,.$$

Los dos valores de x deben satisfacer á la ecuacion de que son deducidos; pero como el problema no admite mas que una solucion, es preciso investigar cual de los dos valores de x la representa. _ Para ello basta considerar que cuando $D=0$ debe ser $q=0$ y $x=0$; pero como cuando $q=0$ el signo superior es el único que dá $x=0$, se sigue que la solucion del problema está dada por la ecuacion

$$x = -\tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 q}$$
$$= -\tfrac{1}{2}p\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right].$$

Cuando q sea positiva hágase

$$\frac{4q}{p^2} = \sin^2\varphi$$

y resultará, $x = -p.\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi$, $t^s = -3600.p.\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi$

Cuando q sea negativa hágase con independencia del signo $\frac{4q}{p^2} = \tan^2\varphi$

y resultará $x = -\tfrac{1}{2}p.\frac{\cos\varphi - 1}{\cos\varphi}$

$$= \tfrac{1}{2}p.\frac{1-\cos\varphi}{\cos\varphi} = \tfrac{1}{2}p.\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi}$$

$$= \tfrac{1}{2}p.\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi\,\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi}}{\cos\varphi}$$

$$= \tfrac{1}{2}p.\frac{\sin\varphi\tan\frac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi}$$

$$= \tfrac{1}{2}p.\tan\varphi\tan\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$t^s = 1800.p.\tan\varphi\tan\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Hora exacta de la conjuncion en AR $= 6 = H + t^s$, atendiendo en todo á las indicaciones de los signos. _ El resultado t^s se obtendrá al décimo de segundo.

Obtenida la hora exacta de t. m. de la conjuncion en AR calcúlense para dicha hora y con exactitud

D = declinacion geocéntrica de la luna (al centmo. de segundo)

δ = declinacion geocéntrica del sol ______ ______ Yd.

D_1 = movimiento horario relativo de la luna en declinacion

(al centésimo de segundo)

= (movto. horo. de la luna en declinacion _ movto. horo. del sol en declinac.)

α_1 = movimiento horario relativo de la luna en ascension recta, en arco y al ~~centésimo~~ milésimo de segundo

= (movim.^{to} hor. de la luna en R) − (mov.^{to} hor.^{o} del sol en R)

$D - \delta$ — „ = diferencia en declinacion entre los centros del sol y de la luna en el momento de la conjuncion en R.

P — „ paralaxe horizontal ecuatorial de la luna (al centésimo de seg.^{o})

π — „ paralaxe horizontal ecuatorial del sol (al centésimo de segundo)

P' — „ paralaxe horizontal relativa en la latitud de $45^{o} = \rho(P - \pi)$, siendo $\log \rho = 9{,}99929$,

s — „ semidiámetro central de la luna (al centésimo de segundo)

σ — „ semidiámetro central del sol (al centésimo de segundo.)

Las declinaciones llevarán el signo $\left\{\pm\right\}$ segun que fueren $\left\{\begin{matrix}\text{boreales}\\ \text{australes}\end{matrix}\right\}$; y los movimientos horarios en declinacion llevarán el signo $\left\{\pm\right\}$ cuando los astros se dirijan hácia el $\left\{\begin{matrix}\text{norte}\\ \text{sur}\end{matrix}\right\}$.

Para calcular á D, δ y demás cantidades que deben obtenerse por interpolacion, se hará uso de la fórmula

$$y_t = y_0 + x\left[\tfrac{1}{2}\left(\Delta'_{-1} + \Delta'_{+1}\right) - \tfrac{1}{12}\left(\Delta^3_{-1} + \Delta^3_{+1}\right)\right]$$

$$+ x^2\left[\tfrac{1}{2}\Delta^2_0 - \tfrac{1}{24}\Delta^4_0\right]$$

$$+ x^3 \cdot \tfrac{1}{12}\left(\Delta^3_{-1} + \Delta^3_{+1}\right)$$

$$+ x^4 \cdot \tfrac{1}{24}\Delta^4_0 .$$

en que $x = \frac{t}{v}$; v = distancia entre dos cantidades inmediatas de la serie primitiva y t = distancia entre la cantidad inicial y la que se busca. — Téngase presente que t y v deben estar espresadas en las mismas unidades.

Para hallar los movimientos horarios se hará uso de la expresion

$$\frac{dy_t}{dt} = \frac{1}{v}\left[\tfrac{1}{2}\left(\Delta'_{-1} + \Delta'_{+1}\right) - \tfrac{1}{12}\left(\Delta^3_{-1} + \Delta^3_{+1}\right)\right] + x\frac{1}{v}\left[\Delta^2_0 - \tfrac{1}{12}\Delta^4_0\right]$$

$$+ x^2\frac{1}{v} \cdot \tfrac{1}{4}\left(\Delta^3_{-1} + \Delta^3_{+1}\right) + x^3 \cdot \frac{1}{v} \cdot \tfrac{1}{6}\Delta^4_0 .$$

representando v la distancia <u>en horas</u> entre dos lugares iniciales de la serie primitiva, y x lo mismo que en el caso anterior.)

Con estos datos se tiene

$$\tan \iota = \frac{D_1}{\alpha_1 \cos D} \quad ; \quad n = (D - \delta) \cos \iota.$$

El signo de $\left\{ \begin{matrix} \iota \\ n \end{matrix} \right\}$ debe ser el de $\left\{ \begin{matrix} D_1 \\ D - \delta \end{matrix} \right\}$.

$$\log k = \log \frac{3600 . \cos \iota}{\alpha_1 \cos D}$$

en cuyo cálculo

$$\log 3600 = 3.5563025.$$

$$\tau = k . n . \tan \iota . \text{ (en segundos de tiempo)}$$

Hora del medio del eclipse genral. $= c - \delta - \tau$,

atendiendo en todo á las indicaciones de los signos, y teniendo cuidado de emplear en segundos los valores de D_1, α_1 $(D - \delta)$. – El valor de n resultará espresado en segundos de arco, y τ en segundos de tiempo. El factor k sirve para reducir á segundos de tpo. un arco de la órbita relativa expresado en segundos de arco.

Fórmense los siguientes valores numéricos de Δ, á saber,

Para el principio ó fin del eclipse general

$$\left.\begin{array}{ll} \text{parcial} \text{———} & ,, \Delta = P' + (s + \sigma) \\ \text{central} \text{———} & ,, \Delta = P' \\ \text{total} \text{———} & ,, \Delta = P' + (s - \sigma) \\ \text{anular} \text{———} & ,, \Delta = P' + (\sigma - s) \end{array}\right\}$$

Calcúlese á

$\cos \omega = \frac{n}{\Delta}$, espresando á n y Δ en segundos, y observando que cuando $\Delta < n$, es imposible la fase de que se trata.

El ángulo ω se tomará siempre positivo, pero su valor numérico puede estar comprehendido entre $0°$ y $180°$. – El signo de $\cos \omega$ indicará el cuadrante en que debe tomarse á ω.

Si $P' > n$ el eclipse será central; en este caso si $(\sigma - s)$ es positiva y mayor que $18''$ (máximo aumento del semidiámetro de la luna en altura) el eclipse será anular; mas si $(\sigma - s)$ no es $> 18''$, el eclipse podrá ser anular para unos lugares y total para otros

$$\tau = k . n \tan \omega \text{ (en segundos de tiempo)}$$

Hora del $\left\{ \begin{matrix} \text{principio} \\ \text{fin} \end{matrix} \right\}$ de la fase correspondiente al valor de Δ que se haya empleado $\Big\} = \left\{ \begin{matrix} H^1 \\ H^2 \end{matrix} \right\} = c \mp \tau,$

atendiendo en todo á las indicaciones de los signos.

Para las horas del

<u>Principio de la fase</u>

$$a^1 = -(\omega + \nu)$$

$$\sin \varphi^1 = \cos \delta \cos a^1$$

$$\tan h^1 = -\frac{\tan a^1}{\sin \delta}$$

<u>Fin de la fase</u>

$$a^2 = (\omega - \nu)$$

$$\sin \varphi^2 = \cos \delta \cos a^2$$

$$\tan h^2 = -\frac{\tan a^2}{\sin \delta}$$

Las h se deben tomar en el mismo semicírculo que las a, respecto del diámetro $0° - 180°$ del círculo trigonométrico, advertencia que se hace de una vez para siempre.

Las latitudes φ son geocéntricas y $\left\{\begin{matrix}\text{boreales}\\ \text{australes}\end{matrix}\right\}$ segun que resulten con el signo $\{\pm\}$.

Se sumará numéricamente á las φ el ángulo de la vertical, para obtener latitudes geográficas, advertencia que hacemos de una vez para siempre.

Ecuacion de tiempo $= \mathcal{E}$.

$$15(\mathcal{H}^1 + \mathcal{E}) = \mathcal{H}_v^1 \quad ; \quad 15(\mathcal{H}^2 + \mathcal{E}) = \mathcal{H}_v^2$$

$$\lambda^1 = \mathcal{H}_v^1 - h^1 \; ; \qquad \lambda^2 = \mathcal{H}_v^2 - h^2$$

Las longitudes geográficas λ son $\left\{\begin{matrix}\text{occidentales}\\ \text{orientales}\end{matrix}\right\}$ segun que resulten con el signo $\{\pm\}$.

Segundo cálculo para obtener con mas aproximacion los resultados anteriores.

Pues que se conocen aproximadamente las latitudes geográficas de los lugares de la tierra que ven por primera y última vez, durante el eclipse, el principio y fin de las principales fases, y las horas del primer meridiano á que estas se verifican, calcúlense para dichas horas las cantidades

$$\mathcal{P}^1, \pi^1, s^1, \sigma^1 \qquad\qquad \mathcal{P}^2, \pi^2, s^2, \sigma^2$$

para el principio y fin de cada fase; calcúlense tambien con el valor correspondiente de ρ los valores de

$$(\mathcal{P}^1)^1 = \rho^1(\mathcal{P}^1 - \pi^1) \qquad\qquad (\mathcal{P}^1)^2 = \rho^2(\mathcal{P}^2 - \pi^2)$$

(3)

y repítanse los procedimientos

Operaciones

1.ª Si $\Delta = n$, se tiene

$$\omega = \left\{\begin{matrix} 0^\circ \\ 180^\circ \end{matrix}\right\} \text{ segun que } \underline{n} \text{ sea } \left\{\begin{matrix} \text{positiva} \\ \text{negativa} \end{matrix}\right\}$$

$$\tau = 0$$

$$[H^1 = H^2] = H^\circ = c.$$

$$[a^1 = a^2] = a^\circ = \omega - \iota$$

$$[\sin\varphi^1 = \sin\varphi^2] = \sin\varphi^\circ = \cos\delta \cos a^\circ.$$

$$[\tan h^1 = \tan h^2] = \tan h^\circ = -\frac{\tan g\, a^\circ}{\sin\delta}.$$

Ecuacion de tiempo $= \mathcal{E}$

$$15(H^\circ_{+} \mathcal{E}) = H^\circ_\nu$$

$$\lambda^\circ = H^\circ_\nu - h^\circ.$$

indicando con el índice $\underline{o}$ así los valores de los elementos del cálculo como los de las coordinadas del lugar de la tierra en este caso.

2.ª Si en los eclipses parciales hacemos $\Delta = n$ por las últimas fórmulas, la longitud y latitud del único lugar de la Tierra que vé en el horizonte la máxima fase aparente, ó mínima distancia aparente de centros, observable en la Tierra durante el eclipse, que corresponde á la mínima distancia verdadera de centros $\Delta = n$., á saber, $\Delta' = n - P'$, y al orto ú ocaso segun el signo de $\underline{h}^\circ$.

3.ª Si $D = \delta$ se tiene

$$n = 0;\ F = 0;\ c = \delta;\ \omega = 90^\circ \text{ y } \underline{\tau} \text{ indeterminada.}$$

El valor de $\underline{\tau}$ en este caso particular es

$\tau = k\Delta$, poniendo por Δ el valor correspondiente á cada fase.

$$\left\{\begin{matrix} H^1 \\ H^2 \end{matrix}\right\} = c \mp \tau$$

$$a^1 = -(90^\circ + \iota) \qquad\qquad a^2 = (90^\circ - \iota)$$

$$\sin\varphi^1 = -\cos\delta . \sin\iota \qquad\qquad \sin\varphi^2 = \cos\delta . \sin\iota$$

$$\tan h^1 = -\frac{\cot\iota}{\sin\delta} \qquad\qquad \tan h^2 = -\frac{\cot\iota}{\sin\delta}$$

Este caso presenta un resultado curioso, á saber, que todos los habitantes de la tierra, que son los primeros en ver una fase cualquiera al orto, están en un mismo paralelo de latitud; lo mismo sucede con todos los que son los últimos en ver las mismas fases al ocaso, y la latitud de estos es igual pero de especie opuesta á la de aquellos.

Ecuacion de tiempo = $\mathcal{E}$

$$15(H^1 + \mathcal{E}) = \mathcal{H}^1_v \quad ; \quad 15(H^2 + \mathcal{E}) = \mathcal{H}^2_v$$

$$\lambda^1 = \mathcal{H}^1_v - h^1 ; \qquad \lambda^2 = \mathcal{H}^2_v - h^2.$$

En los eclipses parciales se acostumbra calcular la posicion geográfica del lugar de la tierra que vé, en su horizonte, la máxima fase aparente, ó mínima distancia aparente de centros observable en la Tierra durante el eclipse, que corresponde á la mínima distancia verdadera de centros $\Delta = n$. En este caso se tiene

$\cos\omega = \frac{n}{\Delta = n} = \pm 1$; $\omega = \left\{\begin{matrix} 0^\circ \\ 180^\circ \end{matrix}\right\}$ segun que n sea $\left\{\begin{matrix} \text{positiva} \\ \text{negativa} \end{matrix}\right\}$; $\tan\omega = 0$, y $\tau = 0$;

por consiguiente, la hora del primer meridiano á que se verifica esta circunstancia es la hora c del medio del eclipse, y las coordinadas geográficas del único lugar en que sucede se obtendrán por las espresiones dadas en la „observacion 1.ª" de este „ Resumen para la práctica".

El lugar determinado verá, pues, en el momento del medio del eclipse y en su horizonte, la mínima distancia aparente de centros observable desde la superficie de la tierra, ó máxima fase correspondiente á la mínima distancia verdadera de centros $\Delta = n$; á saber, $\Delta' = (n - P')$, al orto ú ocaso del sol, segun el signo de h^o.

En los eclipses generales parciales, se tiene

$$\text{Parte eclipsada del sol} = \phi = \frac{(\rho + \sigma) - \Delta'}{2\sigma}$$

suponiendo, para este efecto, = 1 el diámetro del sol.

Eclipse de Sol para la Tierra en general. 17

(2.a parte).

Líneas de contactos en el horizonte (1).

Contactos en el horizonte

Las horas del cálculo deben estar comprehendidas entre las del principio y fin del eclipse general parcial en la tierra.

Calcúlese á

$$\left.\begin{aligned} p &= \tfrac{1}{2}\left[P' - (s+\sigma)\right] \\ q &= \tfrac{1}{2}\left[P' + (s+\sigma)\right] \end{aligned}\right\}$$

cantidades que pueden mirarse como constantes durante todo el eclipse.

Designando con $\dot{I}$ el intérvalo (en segundos de tiempo) entre la hora H del cálculo y la c del medio del eclipse, tendremos para cada intérvalo $\dot{I}$

$$\dot{I} = H \backsim c$$

$$\tan\omega = \frac{\dot{I}}{k n}.$$

El ángulo ω debe tomarse siempre positivo, entre $0°$ y $180°$, pero $> 90°$ cuando n es negativa.

En el cálculo de ω prescindiremos de los signos de $\dot{I}$ y de n.

$$\Delta = \frac{n}{\cos\omega},$$

cantidad siempre positiva.

$$\sin\tfrac{1}{2}\eta = \sqrt{\frac{(\tfrac{1}{2}\Delta - p)(q - \tfrac{1}{2}\Delta)}{P'\Delta}},$$

ángulo siempre positivo y $< 90°$.

Estas cantidades son comunes á cada par de valores de $\dot{I}$ iguales y de signos contrarios; después de obtenidas, se hallará para cada $\dot{I}$ correspondiente á una hora

anterior á la del medio del eclipse general

$$a^1 = -(\omega + \nu)$$

$$\sin(\varphi^1)^1 = \cos(a^1 + \eta)\cos\delta$$

$$\tan(h^1)^1 = -\frac{\tan(a^1 + \eta)}{\sin\delta}$$

$$(\lambda^1)^1 = H_\nu - (h^1)^1$$

$$\sin(\varphi^1)^2 = \cos(a^1 - \eta)\cos\delta$$

* $$\tan(h^1)^2 = -\frac{\tan(a^1 - \eta)}{\sin\delta}$$

$$(\lambda^1)^2 = H_\nu - (h^1)^2$$

posterior á la del medio del eclipse general

$$a^2 = \omega - \nu$$

$$\sin(\varphi^2)^1 = \cos(a^2 - \eta)\cos\delta$$

$$\tan(h^2)^1 = -\frac{\tan(a^2 - \eta)}{\sin\delta}$$

$$(\lambda^2)^1 = H_\nu - (h^2)^1$$

$$\sin(\varphi^2)^2 = \cos(a^2 + \eta)\cos\delta$$

$$\tan(h^2)^2 = -\frac{\tan(a^2 + \eta)}{\sin\delta}$$

$$(\lambda^2)^2 = H_\nu - (h^2)^2;$$

teniendo presentes el tomar á cada h en el mismo semicírculo que su respectiva $(a+\eta)$ ó $(a-\eta)$.

Las latitudes φ serán $\left\{\begin{matrix}\text{borsales}\\ \text{australes}\end{matrix}\right\}$ segun que resulten con el signo $\left\{\begin{matrix}+\\ -\end{matrix}\right\}$.

Las longitudes λ serán $\left\{\begin{matrix}\text{occidentales}\\ \text{orientales}\end{matrix}\right\}$ segun que resulten con el signo $\left\{\begin{matrix}+\\ -\end{matrix}\right\}$.

En la determinacion de los puntos de la tierra que ven á los dos astros en contacto y en el horizonte, pueden ocurrir tres casos, á saber, que sea numéricamente

$$n = P'-(s+\sigma)$$

$$n < P'-(s+\sigma)$$

$$n > P'-(s+\sigma)$$

Primer caso

$$n = P'-(s+\sigma) \text{ ------ (numéricamente)}$$

Durante todo el eclipse, escepto en el momento de verificarse el medio, $\omega \left\{\begin{matrix}<180^\circ\\ >0^\circ\end{matrix}\right\}$ y $\Delta > n$; luego es real el valor de $\sin\frac{1}{2}\nu$ y por consiguiente, posible el cálculo durante todo este intervalo.

En el momento del medio hay un punto múltiplo para cuya determinacion se tiene.

$$\left.\begin{matrix}\omega = 0^\circ\\ \omega = 180^\circ\end{matrix}\right\} \text{ segun que } n \text{ sea } \left\{\begin{matrix}\text{positiva}\\ \text{negativa}\end{matrix}\right\}$$

$$\Delta = n$$

$$\nu = 0^\circ$$

$$a = \omega - \iota$$

$$\sin\varphi = \cos a . \cos\delta$$

$$\operatorname{tang} h = -\frac{\tan a}{\sin\delta}$$

$$\lambda = H_\nu - h$$

Debe, pues, dividirse de cinco en cinco minutos todo el intérvalo que media entre la hora c del medio del eclipse y la del principio, así como el que media entre la misma hora c y la del fin. Con esto se obtendrán los valores numéricos de $I = H \backsim c$, únicos que faltan para obtener resultados de las fórmulas espresadas al principio

Desde luego se echa de ver la conveniencia de hacer á un tiempo el cálculo para dos valores iguales de I, el uno anterior y el otro posterior al medio c del eclipse, porque se hallan á la vez cuatro lugares casi con el mismo trabajo que se emplearía para obtener solos dos.

Segundo caso.

$n < \rho'_-(s+\sigma)$ — numéricamente

Es evidente que á la hora del medio del eclipse en que $\omega = \left\{ \begin{matrix} 0^\circ \\ 180^\circ \end{matrix} \right\}$, $\underline{\Delta} = \underline{n}$, el valor del radical que dá á $\underline{\sin \tfrac{1}{2} \vartheta}$ es imaginario. Tambien será el radical imaginario algun tiempo antes y algun tiempo despues del medio del eclipse, mientras el valor de $\underline{\omega}$ no sea tal que $\Delta > \rho'_-(s+\sigma)$. Cuando $\underline{\omega}$ tenga un valor que haga $\Delta = \rho'_-(s+\sigma)$, se tendrá $\vartheta = 0$, y las fórmulas darán un punto múltiplo antes del medio del eclipse y otro despues, que serán límites de los contactos en el horizonte en cada caso. Conviene determinar las horas $\underline{H_1}$, $\underline{H_2}$ á que se verifican estos límites pues, como se ha visto, en el intérvalo comprendido entre ellas no hay contactos en el horizonte.

Calcúlese, pues, el valor de $\underline{\omega}$ por la fórmula

$$\cos \underline{\omega} = \frac{n}{\Delta} = \frac{n}{\rho'_-(s+\sigma)},$$

tomando á $\underline{\omega}$ siempre positivo pero mayor que 90° cuando $\underline{n}$ sea negativo.

Calcúlese tambien el valor de τ_1 por la fórmula

$$\tau_1 \text{ (en segundos de tiempo)} = k.\,n.\tan\omega$$

y se tendrá

Antes del medio	Despues del medio
Hora $\underline{H_1}$ á que $\Delta = \rho'_-(s+\sigma)$ ---- $\Big\} = c - \tau_1$	Hora $\underline{H_2}$ á que $\Delta = \rho'_-(s+\sigma)$ -- $\Big\} = c + \tau_1$

Posiciones geográficas del

último lugar de la 1.ª serie de contactos en el horizonte	primer lugar de la 2.ª serie de contactos en el horizonte
$a_1 = -(\omega + \iota)$	$a_2 = (\omega - \iota)$
$\sin \varphi_1 = \cos a_1 \cos \delta$	$\sin \varphi_2 = \cos a_2 \cos \delta$
$\tan h_1 = -\dfrac{\tan a_1}{\sin \delta}$	$\tan h_2 = -\dfrac{\tan a_2}{\sin \delta}$
$\lambda_1 = (H_1)_\nu - h_1$	$\lambda_2 = (H_2)_\nu - h_2$

Los $\underline{h}$ deben tomarse en el mismo semicírculo que las correspondientes $\underline{a}$.

Divídase de cinco en cinco minutos el intérvalo que media entre el principio y H_1, así como el que media entre $\underline{H_2}$ y el fin y con esto se obtendrán los valores numéricos de $I = H \backsim c$ únicos que faltan para obtener resultados de las fórmulas espresadas al principio.

Ojo — Antes de la distribucion ~~tiene~~ hay que tener presente el punto de partida.

Desde luego se echa de ver la conveniencia de hacer á un tiempo el cálculo para dos valores iguales de I, el uno correspondientes á la primera serie de contactos en el horizontes y el otro á la segunda, porque se hallan á la vez cuatro lugares casi con el mismo trabajo que se emplearía para solos dos.

Tercer caso

$$n > P' - (s+\sigma) \text{ - - - - - } (\text{numéricamente}).$$

Aun en el momento c del medio del eclipse en que $\omega = \begin{Bmatrix} 0^{\circ} \\ 180^{\circ} \end{Bmatrix}$ se obtienen valores reales para $\sin\frac{1}{2}\nabla$; luego hay contactos en el horizonte durante todo el eclipses.

Deben dividirses de cinco en cinco minutos los intervalos que median entres la hora c y la del principio del eclipse, y entre la misma c y els fin, con lo que se obtendran los valores de $I = \mathcal{H} \sim c$ únicos que faltan para obtener resultados de las fórmulas expresadas al principio.

Desde luego, y como en los casos anteriores, se echa de ver la conveniencia de hacer á un tiempo los cálculos para cada dos valores iguales de I, porque se hallan así cuatro puntos, casi con el mismo trabajo q. se emplearía para dos.

Nota

En todos los casos el signo de h indicará si el contacto se verifica al orto ó al ocaso.

Eclipses de Sol para la Tierra en general

(3a. parte)

Líneas de los límites de visibilidad del eclipse
Línea de los límites de visibilidad de la fase total ó anular.
Línea de centralidad.
Determinacion del lugar de la Tierra que vé el eclipse central á medio dia
Límite boreal y austral de visibilidad de la fase total ó anular en la Tierra.
Línea de los lugares que ven el medio del eclipse, ó máxima fase de su eclipse en el horte.

Líneas de los límites de visibilidad del eclipse

Téngase presente que si, numéricamente,

$$n = P'_{-}(s+\sigma) \quad \text{ó} \quad n > P'_{-}(s+\sigma)$$

hay un solo límite, y que este es $\left\{\begin{matrix}\text{boreal}\\ \text{austral}\end{matrix}\right\}$ segun que n es $\left\{\begin{matrix}\text{negativa}\\ \text{positiva}\end{matrix}\right\}$; y que si, numéricamente,

$$n < P'_{-}(s+\sigma)$$

hay dos límites uno boreal y otro austral, ya sea n positiva ó negativa.

Calcúlese á

$$\cos w_0 = \frac{n \pm (s+\sigma)}{P'},$$

tomando el signo $\left\{\begin{matrix}\text{superior}\\ \text{inferior}\end{matrix}\right\}$ de esta expresion cuando se trate de límite $\left\{\begin{matrix}\text{boreal}\\ \text{austral}\end{matrix}\right\}$. El arco w_0 se tomará siempre positivo pero $\left\{\begin{matrix}\text{mayor}\\ \text{menor}\end{matrix}\right\}$ que 90° segun que la expresion resulte con signo $\left\{\begin{matrix}\text{negativo}\\ \text{positivo}\end{matrix}\right\}$.

En seguida se obtendrá

$$\tau = k . P' \sin w_0$$

y

$$\left.\begin{matrix}H'\\ H''\end{matrix}\right\} = c \mp \tau ;$$

horas estremas, que deben coincidir con las que se obtengan al calcular los puntos de la línea del medio del eclipse en el horizonte para una máxima fase $\Delta' = s+\sigma$.

La posicion geográfica de los lugares estremos correspondientes á dichas horas estremas se hallará por las espresiones

$$D'_0 = \delta \mp (s+\sigma)\cos\iota$$

$$\alpha'_0 = \pm \frac{(s+\sigma)\sin\iota}{\cos D'_0}$$

$$\iota'_0 = \tau \mp (s+\sigma)\tan\delta . \sin\iota,$$

en las que se emplearán los signos $\left\{\begin{matrix}\text{superiores}\\ \text{inferiores}\end{matrix}\right\}$ si se trata de límite $\left\{\begin{matrix}\text{boreal}\\ \text{austral}\end{matrix}\right\}$, y para la hora

anterior á la c

$$a^1 = -(w_0 + i'_0)$$

$$\sin\varphi^1 = \cos D'_0 \cos a^1$$

$$\tan(h^1 - \alpha'_0) = \frac{\tan a^1}{\sin D'_0}$$

$$h^1 = (h^1 - \alpha'_0) + \alpha'_0$$

$$\lambda^1 = H^1_v - h^1$$

posterior á la c

$$a^2 = (w_0 - i'_0)$$

$$\sin\varphi^2 = \cos D'_0 . \cos a^2$$

$$\tan(h^2 - \alpha'_0) = -\frac{\tan a^2}{\sin D'_0}$$

$$h^2 = (h^2 - \alpha'_0) + \alpha'_0$$

$$\lambda^2 = H^2_v - h^2.$$

Las latitudes serán $\left\{\begin{matrix}\text{boreales}\\ \text{australes}\end{matrix}\right\}$, y las longitudes $\left\{\begin{matrix}\text{occidentales}\\ \text{orientales}\end{matrix}\right\}$ si resultan con el signo $\{\pm\}$. El arco h debe tomarse en el mismo semicírculo que su respectiva α. Ademas el signo de h indicará si la fase es al orto ó al ocaso.

Suponiendo que el aumento medio del semidiámetro de la Luna, por razon de su altura es 6," hállese

$$\Delta' = (s + 6'') + \sigma$$

y calcúlense las espresiones

$$\cos(w)_0 = \frac{n \pm \Delta'}{\rho'}$$

$$D' = \delta \mp \Delta' \cos\iota$$

$$\alpha' = \pm \frac{\Delta' \sin\iota}{\cos D'}\,;\quad = c \mp 2\,;$$

$$\iota' = \iota \mp \Delta' . \tan\delta \sin\iota$$

$$k' = \frac{1}{k(n \pm \Delta')},$$

tomando los signos $\left\{\begin{matrix}\text{superiores}\\ \text{inferiores}\end{matrix}\right\}$ cuando se trate de límite $\left\{\begin{matrix}\text{boreal}\\ \text{austral}\end{matrix}\right\}$, y a $(w)_0$ $\left\{\begin{matrix}\text{mayor}\\ \text{menor}\end{matrix}\right\}$ que 90° segun que resulte con signo $\left\{\begin{matrix}\text{negativo}\\ \text{positivo}\end{matrix}\right\}$.
Estas cantidades son constantes para todo el límite.
Divídase de cinco en cinco minutos el intervalo de tiempo que media entre la hora c y cada una de las horas estremas H', H^2; y se tiene para cada dos horas, una anterior y otra posterior á la c, en que resultan divididos dichos intervalos

$$\tan w_1 = k'(c \backsim H)$$

$$\sin Z = \frac{\cos (w)_0}{\cos w_1},$$

y para las horas H_ν

anteriores á la c	posteriores á la c
$a^1 = -(w_1 + c')$	$a^2 = (w_1 - c')$
$\tan \theta^1 = \tan Z . \cos a^1$	$\tan \theta^2 = \tan Z \cos a^2$
$\sin \varphi^1 = \cos Z \dfrac{\sin (D' + \theta^1)}{\cos \theta^1}$	$\sin \varphi^2 = \cos Z \dfrac{\sin (D' + \theta^2)}{\cos \theta^2}$
$\tan (h^1 - c') = \tan a^1 \dfrac{\sin \theta^1}{\cos (D' + \theta^1)}$	$\tan (h^2 - c') = \tan a^2 \dfrac{\sin \theta^2}{\cos (D' + \theta^2)}$
$\lambda^1 = H_\nu - h^1$	$\lambda^2 = H_\nu - h^2$

tomando á $\theta < 90°$ y del mismo signo que su correspondiente a.

Las latitudes serán $\left\{ \begin{matrix} \text{boreales} \\ \text{australes} \end{matrix} \right\}$, y las longitudes $\left\{ \begin{matrix} \text{occidentales} \\ \text{orientales} \end{matrix} \right\}$ si resultan con el signo $\left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\}$.

2

Líneas de los límites de visibilidad de la fase total ó anular.

Se procede del mismo modo que en los anteriores límites sin mas diferencia que poner donde haya $(s + \sigma)$

$s - \sigma$ — para la fase total

$\sigma - s$ — para la fase anular

y hacer el mismo cambio en la espresion de Δ'.

De estos límites siempre hay dos, uno boreal y otro austral, pero teniendo en cuenta las espresiones que tienen un signo para cada una de estas circunstancias no hay que pensar en mas que en lo dicho.

En esta clase de líneas conviene rectificar los resultados empleando las paralages para las horas y latitudes determinadas en el cálculo anterior en vez de P', s y σ, é introduciendo el verdadero aumento del semidiámetro en altura de la Luna, que se determina con la distancia zenital Z, en vez del aumento medio de $6''$ que se empleó hasta aquí.

E

Línea de centralidad.

Las horas extremas se han determinado al tratarse de las horas y lugares que ven las principales fases en el horizonte.

Divídase de cinco en cinco minutos el intervalo de tiempo que media entre la hora del medio del eclipse y cada una de las horas extremas, y calcúlese

$$\tan w_c = \frac{\cos H}{k n} = \frac{I}{k n}.$$

tomando á $w_c > 90°$ cuando $\tan w_c$ resulte negativa;

$$\sin Z = \frac{n}{\rho' \cos w_c}, \text{ tomando á } Z \text{ positiva y } < 90°;$$

y para las horas

anteriores á la c	posteriores á la c
$a = -(w_c + \iota)$	$a = (w_c - \iota)$
$\tan \theta = \tan Z \cos a$	$\tan \theta = \tan Z \cos a$

tomando á $\theta < 90°$ y del mismo signo que su correspondiente $\cos a$.

$\tan h = \tan a . \frac{\sin \theta}{\cos(\delta + \theta)}$	$\tan h = \tan a \frac{\sin \theta}{\cos(\delta + \theta)}$
$\tan \varphi = \cos h . \tan(\delta + \theta)$	$\tan \varphi = \cos h . \tan(\delta + \theta)$
$\lambda = H_v - h$	$\lambda = H_v - h.$

Obtenidos los lugares por que pasa la línea de centralidad se procede á una segunda determinacion, calculando las paralaxes para las horas y latitudes halladas.

F

Determinacion del lugar de la tierra que vé el eclipse central á mediodia

$$\sin Z = \frac{D - \delta}{\rho'}$$

Tomando á $Z < 90°$ y con el mismo signo que tenga $(D - \delta)$

$$\varphi = (Z + \delta).$$

λ = longitud occidental = Hora de t. v. del primer meridiano de la σ en $\mathcal{R}$.

El segundo cálculo está reducido á repetir el anterior con la paralaxe determinada para la latitud φ.

G

Límites boreal y austral de visibilidad de la fase total ó anular en la tierra.

Sirven las mismas fórmulas y procedimientos que se han empleado en el cálculo de las líneas límites boreales ó australes de visibilidad del eclipse en la tierra, sin mas alteracion que la de hacer

$$\Delta' = (s + 6'') - \sigma \text{ —— para la fase total}$$

$$\Delta' = \sigma - (s + 6'') \text{ —— para la fase anular.}$$

En el segundo cálculo, que siempre se hace para estas líneas y la de centralidad, se emplearán las paralaxes para las horas y latitudes determinadas en el primero; y los semidiámetros para las horas designadas, introduciendo el verdadero aumento en altura del de la luna, en vez del aumento medio de 6'' que hemos empleado en la primera determinacion.

Línea de los lugares que ven el medio del eclipse ó máxima fase de su eclipse en el horizonte.

Si se supone que sea Δ' la fase que debe verse como máxima en el horizonte, las horas á que esta sucede y las posiciones geográficas de los puntos de la tierra que la ven, se determinarán como sigue.

Calcúlese la espresion

$$\cos w_0 = \frac{a + \Delta'}{\rho'}$$

en que w_0 es siempre positivo, y mayor que 90° cuando el signo de la espresion es negativo.

En seguida se obtendrá

$$\tau = k \, P \sin w_0 ;$$

y

$$\left. \begin{matrix} H' \\ H'' \end{matrix} \right\} = c \mp \tau$$

son las horas á que dicha fase sucede, como máxima, en el horizonte.

Las posiciones geográficas de los puntos de la tierra en que tiene lugar, se determinan por las espresiones siguientes.

$$D' = \delta - \Delta' \cos \iota$$

$$\alpha' = \frac{\Delta' \sin \iota}{\cos D'}$$

$$\iota' = \iota - \Delta' \tan \delta . \sin \iota$$

que son comunes á los dos lugares y por consiguiente á las horas H^1, H^2; pero para el lugar correspondiente á la hora

anterior á la c

$$a^1 = -(w_0 + \iota')$$

$$\sin \varphi^1 = \cos D' \cos a^1$$

$$\tan(h^1 - \alpha') = -\frac{\tan a^1}{\sin D'}$$

$$h^1 = (h^1 - \alpha') + \alpha'$$

$$\lambda^1 = H_v^1 - h^1$$

posterior á la c

$$a^2 = (w_0 - \iota')$$

$$\sin \varphi^2 = \cos D' \cos a^2$$

$$\tan(h^2 - \alpha') = -\frac{\tan a^2}{\sin D'}$$

$$h^2 = (h^2 - \alpha') + \alpha'$$

$$\lambda^2 = H_v^2 - h^2$$

Las latitudes serán $\left\{\begin{matrix}\text{boreales}\\ \text{australes}\end{matrix}\right\}$ y las longitudes $\left\{\begin{matrix}\text{occidentales}\\ \text{orientales}\end{matrix}\right\}$ si resultan con los signos $\left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}$. Los arcos $(h - \alpha')$ deben tomarse en el mismo semicírculo en que está su respectiva a.

En esta curva, como en la de contactos en el horizonte, es necesario atender á tres casos, á saber, cuando

$$n = P' - (s + \sigma)$$

$$n < P' - (s + \sigma)$$

$$n > P' - (s + \sigma)$$

Primer caso.

$n = P' - (s + \sigma)$ ------- (numéricamente)

Á partir desde un valor de Δ' que reduzca á cero el numerador de la espresion de $\cos w_0$ váyanse sumando y restando sucesivamente 2' hasta obtener una tabla de valores de Δ' que principie por $-(s+\sigma)$ y acabe en $+(s+\sigma)$, pues que todos estos valores hacen posible la espresion de $\cos w_0$.

Estos valores de Δ' son los que se han de sustituir en las fórmulas del principio para obtener las horas á que suceden las fases que ellos representen, y posiciones geográficas de los lugares que han de determinar la línea

Segundo caso

$n < P' - (s+\sigma)$ ------ (numéricamente)

Se está en iguales circunstancias que en el caso primero, por la misma razon; por consiguiente se procederá del propio modo.

Tercer caso

$n > P' - (s+\sigma)$ ----- (numéricamente)

Ese caso es mas complicado que los anteriores para determinar los valores de Δ' que se han de emplear, y se necesita atender á varias circunstancias.

1ª Si se tiene n positiva y mayor que P', la espresion de $\cos w_0$, que es

$$\cos w_0 = \frac{+n+\Delta'}{P'}$$

no es posible para ningun valor positivo de Δ'. Tampoco es posible para los negativos mientras Δ' permanezca siendo numéricamente menor que $(n - P')$.

Cuando Δ' se suponga igual $-(n-P')$, resulta $w_0 = 0$ y dá una sola hora y un solo lugar que vé en su horizonte la máxima fase representada por $-(n-P')$. A partir desde el valor $-(n-P')$ hasta el $-(s+\sigma)$ son posibles los valores de w_0, y habrá dos lugares que vean las respectivas fases como máximas en el horizonte. Deben, pues, obtenerse los valores de Δ' para substituirlos en las fórmulas del principio, aplicando $2'$ con signo negativo y sucesivamente al valor inicial $-(n-P')$, y á cada uno de los que vayan resultando hasta obtener una serie de valores que estén comprendidos entre $-(n-P')$ y $-(s+\sigma)$.

2ª, Si se tiene n positiva é igual á P' la espresion de $\cos w_0$, que es

$$\cos w_0 = \frac{+n+\Delta'}{P'}$$

no es posible para ningun valor positivo de Δ'. Cuando $\Delta' = 0$, $w_0 = 0$, y las fórmulas del principio dan una hora, y un lugar que vé en el horizonte confundidos los centros del Sol y de la Luna. Todos los valores negativos de Δ' hacen posible la espresion de $\cos w_0$ y en todos ellos, por consiguiente, hasta el de $-(s+\sigma)$, habrá dos lugares que vean la fase respectiva como máxima en el horizonte. Luego los valores de Δ' que deben emplearse en los cálculos se obtendrán aplicando $2'$ con signo negativo y sucesivamente al valor inicial 0, y á cada uno de los que vayan resultando, hasta obtener una serie de valores comprendidos entre 0 y $-(s+\sigma)$.

3.ª „ Si se tiene n positiva y menor que P' la espresion de $\cos w_0$ que es

$$\cos w_0 = \frac{+n+\Delta'}{P'}$$

no es posible para los valores positivos de Δ' mayores que $(P'-n)$. Cuando Δ' se suponga igual á $(P'-n)$, $w_0 = 0$ y las fórmulas dan una hora y un lugar que vé como máxima en el horizonte la fase correspondiente. A partir de este valor como máximo, y hasta el valor $-(s+\sigma)$, son posibles los valores de w_0, y, por consiguiente, cada uno dá dos horas y dos lugares que ven en el horizonte como máxima la fase respectiva. Entre estos valores está $\Delta' = 0$ que dá las dos horas y los dos lugares que ven á ellas en el horizonte, confundidos los centros del Sol y la Luna. Se determinarán, pues, los valores de Δ' aplicando $2'$ con signo positivo ~~[illegible]~~ sucesivamente al valor inicial 0 y á los que vayan resultando hasta el valor $(P'-n)$, y después $2'$ con signo negativo, y sucesivamente, al valor inicial 0 y á los que vayan resultando, hasta $-(s+\sigma)$, con lo que se obtendrán los valores de Δ' que se han de emplear en las fórmulas del principio, procediendo de $2'$ en $2'$, á partir desde $+(P'-n)$ hasta $-(s+\sigma)$

4.ª „ Si se tiene n negativa y numéricamente, mayor que P', la espresion de $\cos w_0$, que es

$$\cos w_0 = \frac{-n+\Delta'}{P'},$$

no es posible para los valores negativos de Δ', ni para $\Delta' = 0$. El primer caso en que puede verificarse es cuando Δ' se suponga igual $(n-P')$, tomando á n numéricamente y con abstraccion del signo, y en todos los valores mayores que este hasta el $(s+\sigma)$. El primero de ellos, $(n-P')$, dá una sola hora y un solo lugar en que á ella se vé dicha fase en el horizonte como máxima, los demás valores darán dos horas y dos lugares que verán á ellas la fase respectiva como máxima en el horizonte. Se obtendrán, pues, los valores de Δ' que han de emplearse en las fórmulas del principio aplicando $2'$ con signo positivo sucesivamente al valor inicial $(n-P')$ y á los que vayan resultando tomando para esto á n numéricamente, y con abstraccion del signo, hasta obtener una serie de valores comprendidos entre $(n-P')$ y $(s+\sigma)$.

5.ª Si se tiene n negativa y numéricamente igual á P', la espresion de $\cos w_0$, que es

(3)

$$\cos w_0 = \frac{-n+\Delta'}{\rho'},$$

no es posible para los valores negativos de Δ'. Cuando $\Delta'=0$ $w_0=0$; y las fórmulas dan una hora y un lugar que vé á ella confundidos en el horizonte los centros del Sol y de la Luna. Todos los valores positivos de Δ' hasta $(s+\sigma)$ dan dos horas y dos lugares que ven á ellas en el horizonte, la fase respectiva como máxima. Por consiguiente los valores de Δ' que han de emplearse en las fórmulas del principio se obtendrán aplicando 2' con signo positivo sucesivamente al valor inicial 0 y á todos los que vayan resultando hasta $(s+\sigma)$ para obtener una serie de valores comprendidos entre 0 y $(s+\sigma)$.

6ª - Finalmente, si se tiene n negativa y numéricamente menor que ρ', la espresion de $\cos w_0$, que es

$$\cos w_0 = \frac{-n+\Delta'}{\rho'},$$

no es posible para los valores negativos de Δ' comprendidos entre $-(s+\sigma)$ y $-(\rho'-n)$, tomando á n numéricamente y con abstraccion del signo. Cuando Δ' se suponga igual $-(\rho'-n)$, las fórmulas darán una sola hora y un solo lugar que verá en el horizonte como máxima dicha fase. Desde este valor de Δ' hasta el $+(s+\sigma)$ las fórmulas dan dos horas y dos lugares que ven á ellas las fases respectivas, como máximas, en el horizonte; entre las que figuran las correspondientes á cuando Δ' sea igual 0, en que se verán confundidos los centros del Sol y de la luna. Se determinarán, pues, los valores de Δ' aplicando 2' con signo negativo sucesivamente al valor inicial 0 y á todos los que vayan resultando hasta el valor $-(\rho'-n)$, tomando para esto á n numéricamente, y con abstraccion del signo, y despues 2' con signo positivo, y sucesivamente, al valor inicial 0 y á los que vayan resultando hasta $(s+\sigma)$, con lo que se obtendrán los valores de Δ' que se han de emplear en las fórmulas del principio procediendo de 2' en 2', á partir desde $-(\rho'-n)$ hasta $+(s+\sigma)$.