Paso de los planetas inferiores Mercurio y Venus por el disco del Sol (número 1)

s.d.

Paso de los planetas inferiores Mercurio y Venus por el disco del Sol. (núm.º 1)

Paso de los planetas inferiores, Mercurio y Venus, por el disco del Sol

Las horas del primero y último contacto del planeta con el Sol, referido el fenómeno al centro de la Tierra, se determinan por las fórmulas contenidas en la primera parte del espediente Eclipses de Sol, suponiendo nulas las paralages; y así, si se llama

δ — „ la hora de tiempo medio astronómico de S. Fernando de la conjuncion geocéntrica del planeta con el Sol en ascens. recta,

M_p — „ el movimiento horario en valor numérico de la ascension recta aparente geocéntrica del planeta, que resultará con el signo — por estar retrogado,

M_s — „ el movimiento horario, en valor numérico, de la ascension recta aparente geocéntrica del Sol, que resultará con el signo +

δ_p — „ la declinacion aparente geocéntrica del planeta, á la que se pondrá el signo $\left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}$ si fuere $\left\{\begin{matrix}\text{boreal}\\\text{austral}\end{matrix}\right\}$,

δ_s — „ la declinacion aparente geocéntrica del Sol á la que se pondrá el signo $\left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}$ si fuere $\left\{\begin{matrix}\text{boreal}\\\text{austral}\end{matrix}\right\}$,

m_p — „ el movimiento horario de δ_p, que llevará el signo $\left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}$ segun que el planeta vaya hácia el $\left\{\begin{matrix}\text{Norte}\\\text{Sur}\end{matrix}\right\}$,

m_s — „ el movimiento horario de δ_s, que llevará el signo $\left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}$ segun que el Sol vaya hácia el $\left\{\begin{matrix}\text{Norte}\\\text{Sur}\end{matrix}\right\}$;

S_p — „ el semidiámetro central del planeta,

S_s — „ el semidiámetro central del sol,

para la hora δ

se determinarán los valores ι, n, ω, y $\log k$ por las fórmulas

$$\tan\iota = \frac{m_p - m_s}{(M_p - M_s)\cos\delta_p}, \quad n = (\delta_p - \delta_s)\cos\iota, \quad \cos\omega = \frac{n}{S_p + S_s}, \quad k = \frac{3600.\cos\iota}{(M_p - M_s)\cos\delta_p}$$

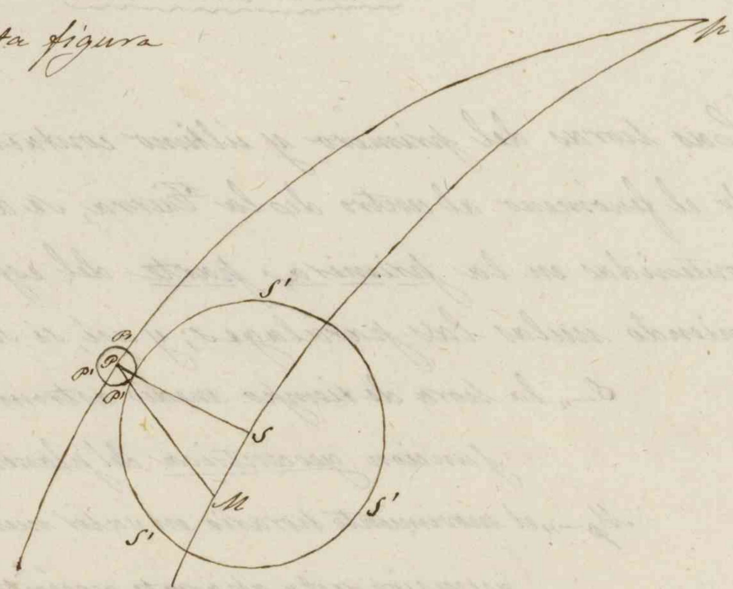
Tómese $\iota < 90°$, y con el signo que resulte de la fórmula; póngase á n el signo de $(\delta_p - \delta_s)$, y tómese á $\omega \left\{\begin{matrix}< 90°\\> 90°\end{matrix}\right\}$ si $\cos\omega$ resulta con signo $\left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}$: el valor de k resultará forzosamente negativo.

Si se llama c la hora á que se verifica la mínima distancia de centros n, y $\left\{\begin{matrix}H_1\\H_2\end{matrix}\right\}$ las horas del $\left\{\begin{matrix}\text{primero}\\\text{último}\end{matrix}\right\}$ contacto, se tendrá

$$c = \delta - k.n.\tan\iota, \quad \left.\begin{matrix}H_1\\H_2\end{matrix}\right\} = c \pm k.n.\tan\omega.$$

Sea ahora $\left\{\begin{matrix}\alpha'_p\\\alpha'_s\end{matrix}\right\}$ las ascen. recta apar. geoc. del $\left\{\begin{matrix}\text{planeta}\\\text{sol}\end{matrix}\right\}$ á la hora H_1; y póngase un tilde á los caracteres con que se representaron las declinaciones y mor.^s hor.^s á la hora 0 para representar los correspondientes á la hora $H_,$; los semidiámetros no varian sensiblemente.

Si en esta figura



p es el polo del mundo, $S'S'S'$ la circunferencia del disco del Sol y S su centro, $P'P'P'$ la circunferencia del disco del planeta y P su centro, el triángulo pPS estará formado de

Lados	Angulos opuestos
$pP = 90° - \delta'_p$	.... $pSP = Z'$
$pS = 90° - \delta'_s$	
$PS = S_p + S_s = D'$	.... $PpS = \alpha'_p - \alpha'_s$

y en el se tendrá

$$\sin D' \sin Z' = \sin(\alpha'_p - \alpha'_s)\cos\delta'_p$$

$$\sin D' \cos Z' = \sin\delta'_p \cos\delta'_s - \cos(\alpha'_p - \alpha'_s)\cos\delta'_p \sin\delta'_s$$

de donde

$$\tan Z' = \frac{\sin(\alpha'_p - \alpha'_s)\cos\delta'_p}{\sin\delta'_p\cos\delta'_s - \cos(\alpha'_p - \alpha'_s)\cos\delta'_p\sin\delta'_s}.$$

Por ser muy pequeños los arcos $(\alpha'_p - \alpha'_s)$, $(\delta'_p - \delta'_s)$ y D', se puede suponer, sin error sensible, que

$$\sin(\alpha'_p - \alpha'_s) = \alpha'_p - \alpha'_s = (\alpha'_p - \alpha'_s)''\sin 1''; \quad \cos(\alpha'_p - \alpha'_s) = 1; \quad \sin(\delta'_p - \delta'_s) = (\delta'_p - \delta'_s)''.\sin 1''; \quad \sin D' = (D')''.\sin 1'';$$

y bajo estos supuestos

$$\tan Z' = \frac{(\alpha'_p - \alpha'_s)''}{(\delta'_p - \delta'_s)''}.\cos\delta'_p \;;\; (D')'' = \frac{(\alpha'_p - \alpha'_s)''.\cos\delta'_p}{\sin Z'} = \frac{(\delta'_p - \delta'_s)''}{\cos Z'}. \;\text{......}\; \mathbf{(I)}$$

De la fórmula segunda de las que anteceden, se deduce, puesto que la estension absoluta del arco de círculo menor PM es $(\alpha'_p - \alpha'_s)\cos\delta'_p$, que el triángulo PMS puede considerarse como un triángulo rectilíneo, rectángulo en M.

Si con los valores de α'_p, α'_s, δ'_p, δ'_s, se encontrase por medio de las fórmulas anteriores un valor de D' igual á $S_p + S_s$, el primer contacto tendría lugar realmente á la hora $H_,$; pero si el valor resultante de D' fuese $\left\{\begin{matrix}\text{mayor}\\ \text{menor}\end{matrix}\right\}$ que $S_p + S_s$ la hora del primer contacto sería $\left\{\begin{matrix}\text{posterior}\\ \text{anterior}\end{matrix}\right\}$ á la hora $H_,$. Sea $t_,$ la correccion en segundos de tiempo que necesita la hora H_1 para obtener la del primer contacto, en cuyo momento

la ascension recta apar. geoc. del planeta será ------------ $\alpha'_p + \frac{M'_p}{3600} t'$,

su declinacion apar. geocént. ------------ $\delta'_p + \frac{m'_p}{3600} t'$,

la ascension recta apar. geocent. del Sol ------------ $\alpha'_s + \frac{M'_s}{3600} t'$;

su declinacion apar. geocént. ------------ $\delta'_s + \frac{m'_s}{3600} t'$;

y por consiguiente

$$(S_p + S_s)^2 = \left[(\alpha'_p - \alpha'_s) + \frac{t'}{3600}(M'_p - M'_s)\right]^2 \cos^2\left(\delta'_p + \frac{m'_p}{3600} t'\right) + \left[(\delta'_p + \delta'_s) + \frac{t'}{3600}(m'_p + m'_s)\right]^2.$$

Respecto á que t debe ser muy pequeño puede suponerse, sin error sensible que los términos afectados por la segunda potencia de t son despreciables, y además que $\cos^2\left(\delta'_p + \frac{m'_p}{3600} t\right) = \cos^2 \delta'_p$; y elevando al cuadrado bajo estos supuestos será

$$(S_p + S_s)^2 = (\alpha'_p - \alpha'_s)^2 \cos^2 \delta'_p + (\delta'_p - \delta'_s)^2 + 2\frac{t'}{3600}(\alpha'_p - \alpha'_s)(M'_p - M'_s) \cdot \cos^2 \delta'_p$$
$$+ 2\frac{t'}{3600}(\delta'_p - \delta'_s)(m'_p - m'_s);$$

pero como

$$D'^2 = (\alpha'_p - \alpha'_s)^2 \cos \delta'_p + (\delta'_p - \delta'_s)^2$$

resulta que

$$(S_p + S_s)^2 - D'^2 = (S_p + S_s + D')(S_p + S_s - D') = 2\frac{t'}{3600}\left[(\alpha'_p - \alpha'_s)(M'_p - M'_s)\cos^2 \delta'_p + (\delta'_p - \delta'_s)(m'_p - m'_s)\right]$$

y haciendo $S_p + S_s = S$, y tomando los arcos en segundos

$$t' = \frac{3600 \frac{1}{2}(S + D')''(S - D')''}{(\alpha'_p - \alpha'_s)(M'_p - M'_s)'' \cos^2 \delta'_p + (\delta'_p - \delta'_s)''(m'_p - m'_s)''} \text{ ------ (II)}$$

Se tiene que la hora (H_1) exacta del primer contacto, referido el fenómeno al centro de la tierra es

$$(H_1) = H_1 + t'$$

Con iguales raciocinios pueden obtenerse las fórmulas respectivas al último contacto, es decir, que si representamos con los mismos caracteres, pero con dos tildes, las cantidades correspondientes á la hora H_2 se hallará

$$\tan Z'' = \frac{(\alpha''_p - \alpha''_s)''}{(\delta''_p - \delta''_s)''}\cos\delta''_p \; ; (D'')'' = \frac{(\alpha''_p - \alpha''_s)''}{\sin Z''}\cos\delta_p = \frac{(\delta''_p - \delta''_s)''}{\cos Z''} ;$$

$$t'' = \frac{3600\frac{1}{2}(S+D'')''(S-D'')''}{(\alpha''_p - \alpha''_s)''(M''_p - M''_s)''\cos^2\delta''_p + (\delta''_p - \delta''_s)(m''_p - m''_s)''}$$

$$(H_2) = H_2 + t''.$$

El arco $\left\{\begin{matrix} Z' \\ Z'' \end{matrix}\right\}$ es, visible y sensiblemente, atendiendo á la pequeñez de $\left\{\begin{matrix} t' \\ t'' \end{matrix}\right\}$, el arco del disco solar comprendido entre el vértice boreal del Sol y el punto donde se verifica el $\left\{\begin{matrix} \text{primer} \\ \text{último} \end{matrix}\right\}$ contacto, contado hácia $\left\{\begin{matrix} \text{oriente} \\ \text{occidente} \end{matrix}\right\}$.

Como en el pequeño intérvalo $\left\{\begin{matrix} t' \\ t'' \end{matrix}\right\}$ el valor de $\left\{\begin{matrix} \alpha'_s \\ \alpha''_s \end{matrix}\right\}$ deben variar en muy corta cantidad, si se llama $\left\{\begin{matrix} (\Theta') \\ (\Theta'') \end{matrix}\right\}$ las ascension recta del zenit en S. Fernando correspondiente á la hora $\left\{\begin{matrix} (H_1) \\ (H_2) \end{matrix}\right\}$ se tiene

Longitud geográfica del lugar que tiene al Sol en el zenit en el momento del $\left\{\begin{matrix} \text{primer} \\ \text{último} \end{matrix}\right\}$ contacto $= \left\{\begin{matrix} (\Theta') - \alpha'_s \\ (\Theta'') - \alpha''_s \end{matrix}\right\}$. Estas longitudes serán occidentales si resultan con el signo $+$, y orientales si resultan con el signo $-$.

En razon de la pequeñísima variacion que la declinacion del Sol debe esperimentar en el intérvalo $\left\{\begin{matrix} t' \\ t'' \end{matrix}\right\}$ se sigue que $\left\{\begin{matrix} \delta'_s \\ \delta''_s \end{matrix}\right\}$ será la latitud geocéntrica del lugar que tiene el Sol en el zenit á la hora $\left\{\begin{matrix} (H_1) \\ (H_2) \end{matrix}\right\}$; y aplicándole el ángulo de la vertical se tendrá la correspondiente latitud geográfica.

Lo determinado hasta aquí se refiere al centro de la Tierra; pero donde se ha de observar el fenómeno es en la superficie, y para ella es para donde se necesitan los anuncios. De todos los que pueden dar las fórmulas anteriores no hay necesidad efectiva de rectificar mas que las horas del primero y último contacto; pues que, en razon de la pequeñez de las paralages de los astros de que se trata, los valores de $\underline{Z'}$, $\underline{Z''}$ son prácticamente exactos para la superficie, y las posiciones geográficas de los lugares que tienen al Sol en el zenit á las horas de dichos contactos indicarán, con la aproximacion necesaria, orientando convenientemente un globo, las partes de la Tierra en que puedan ser visibles los contactos. Con objeto de rectificar dichas horas sean $\underline{a'_p}$, $\underline{a'_s}$, $\underline{d'_p}$, $\underline{d'_s}$, respectivamente las ascensiones rectas y declinaciones aparentes geocéntricas del planeta y del Sol á la hora (H), y además

Π_p — „ la paralage horizontal ecuatorial del planeta,

Π_s — „ la paralage horizontal ecuatorial del Sol,

$\mathcal{R}'_p$ — „ la paralage en ascension recta del planeta,

$\mathcal{R}'_s$ — „ la paralage en ascension recta del Sol,

ϖ'_p — „ la paralage en declinacion del planeta,

ϖ_s — „ la paralage en declinacion del Sol.

Se tendrá, pues

$\alpha'_p + \mathcal{R}'_p = (\alpha'_p)$ — „ la ascension recta del planeta visto desde la superficie de la Tierra,

$\alpha'_s + \mathcal{R}'_s = (\alpha'_s)$ — „ la ascension recta del sol visto desde la superficie de la Tierra,

$d'_p + \varpi_p = (d'_p)$ — „ la declinacion del planeta visto desde la superficie de la Tierra,

$d'_s + \varpi'_s = (d'_s)$ — „ la declinacion del sol visto desde la superficie de la Tierra;

y sean

M'_p — „ el movimiento horario de (α'_p),

M'_s — „ el movimiento horario de (α'_s),

m'_p — „ el movimiento horario de (d'_p)

m'_s — „ el movimiento horario de (d'_s)

Δ' „ la distancia de los centros de los astros vistos desde la superficie de la Tierra, á la hora (H_1).

A la hora (H_1) en que los astros están en contacto vistos desde el centro de la Tierra, no lo estarán vistos desde la superficie; pero la hora en que así suceda, diferirá muy poco de la (H_1). Puede, pues, considerarse la hora (H') como una aproximacion del momento en que se ha de observar el fenómeno, y determinarse la correccion que se há de aplicar á dicha hora para obtener la exacta. Con este objeto, en la figura anterior, considérese que en el momento (H_1), el centro de la esfera, de que son círculos máximos los $p\,\mathcal{P}$, $p\,\mathcal{S}$, está colocado en un lugar de la superficie de la Tierra; si sobre dicha figura, y bajo este supuesto se hacen las mismas consideraciones que se hicieron para corregir la hora H_1, se llegará á determinar una correccion (t') que aplicada á la hora (H_1) dará la en que se verifica el fenómeno visto desde la superficie de la Tierra.

Es evidente que la correccion (t') la dará la fórmula (II) substituyendo en ella por α'_p, α'_s, δ'_p, δ'_s, M'_p, M'_s, m'_p, m'_s y D' respectivamente (α'_p), (α'_s), (δ'_p), (δ'_s), $(M'_p$, M'_s, m'_p, m'_s y Δ', y teniendo presente que los semidiámetros no varian sensiblemente, ni por el tiempo, ni por la diferente distancia á que se encuentran del centro de la esfera; es decir que

$$(t') = \frac{3600\,\frac{1}{2}(S^2 - \Delta'^2)}{(a'_p - a'_s + \pi'_p - \pi'_s)(M'_p - M'_s)\cos(d'_p + \varpi'_p) + (d'_p - d'_s + \varpi'_p - \varpi'_s)(m'_p - m'_s)}$$

Tambien se tiene

$$S^2 = (a'_p - a'_s)^2 \cos d'_p + (d'_p - d'_s)^2$$

$$\Delta'^2 = (a'_p - a'_s + \pi'_p - \pi'_s)^2 \cos^2(d'_p + \varpi'_p) + (d'_p - d'_s + \varpi'_p - \varpi'_s)^2$$

Elevando al cuadrado la segunda ecuacion, teniendo presente que por ser ϖ'_p de solos algunos segundos es, sin error sensible, $\cos d'_p = \cos(d'_p + \varpi'_p)$ y despreciando las segundas potencias de $(\pi'_p - \pi'_s)$, $(\varpi'_p - \varpi'_s)$ por ser cantidades muy pequeñas, resulta

$$\Delta'^2 = (a'_p - a'_s)^2 \cos^2 d'_p + 2(a'_p - a'_s)(\pi'_p - \pi'_s)\cos^2 d'_p + (d'_p - d'_s)^2 + 2(d'_p - d'_s)(\varpi'_p - \varpi'_s)$$

luego

$$\tfrac{1}{2}(S^2 - \Delta'^2) = (a'_s - a'_p)(\pi'_p - \pi'_s)\cos^2 d'_p + (d'_s - d'_p)(\varpi'_p - \varpi'_s)$$

y

$$(t') = \frac{3600(a'_s - a'_p)(\pi'_p - \pi'_s)\cos^2 d'_p + 3600(d'_s - d'_p)(\varpi'_p - \varpi'_s)}{(a'_p - a'_s)(M'_p - M'_s)\cos^2 d'_p + (\pi'_p - \pi'_s)(M'_p - M_s)\cos^2 d'_p + (d'_p - d'_s)(m'_p - m'_s) + (\varpi'_p - \varpi'_s)(m'_p - m'_s)}.$$

Efectuando la division en la espresion $\frac{P}{Q+P'}$ se encuentra

$$\frac{P}{Q+P'} = \frac{P}{Q} - \frac{PP'}{Q^2} + \frac{PP'^2}{Q^3} \ldots\ldots\ldots\ldots \&c;$$

y si se supone

$$P = 3600(a'_s - a'_p)(\pi'_p - \pi'_s)\cos^2 d'_p + 3600(d'_s - d'_p)(\varpi'_p - \varpi'_s),$$

$$P' = (M'_p - M'_s)(\pi'_p - \pi'_s)\cos^2 d'_p + (m'_p - m'_s)(\varpi'_p - \varpi'_s),$$

$$Q = (a'_p - a'_s)(M'_p - M'_s)\cos^2 d'_p + (d'_p - d'_s)(m'_p - m'_s),$$

el primer miembro es la espresion de (t'), y el segundo término del segundo miembro ya es del segundo órden respecto de las paralages; luego conforme con lo hecho hasta aquí puede despreciarse, y entonces

$$(t') = \frac{3600(a'_s - a'_p)(\pi'_p - \pi'_s)\cos^2 d'_p + 3600(d'_s - d'_p)(\varpi'_p - \varpi'_s)}{(a'_p - a'_s)(M'_p - M'_s)\cos^2 d'_p + (d'_p - d'_s)(m'_p - m'_s)};$$

cuya fórmula, considerando que $(M'_p - M'_s)$, $(m'_p - m'_s)$ son sensiblemente iguales á $(M_p - M_s)$, $(m_p - m_s)$, y haciendo

$$A' = \frac{3600(a'_s - a'_p)\cos^2 d'_p}{(a'_p - a'_s)(M_p - M_s)\cos^2 d'_p + (d'_p - d'_s)(m_p - m_s)}$$

$$B' = \frac{3600(d'_s - d'_p)}{(a'_p - a'_s)(M_p - M_s)\cos^2 d'_p + (d'_p - d'_s)(m_p - m_s)}$$

se transforma en

$$(t') = A'(\pi'_p - \pi'_s) + B'(\varpi'_p - \varpi'_s).$$

Si se supone que

φ — „ es la latitud geocéntrica del lugar de la Tierra en que haya de observarse el primer contacto,

ρ — „ el radio terrestre respectivo á dicha latitud, tomando por unidad el del ecuador,

λ — „ la longitud oriental del mismo lugar

θ' — „ la ascension recta del zenit á la hora $(\mathcal{H}_1)$ en dicho lugar

será

$\rho\Pi_p$ — „ la paralage horizontal del planeta en dicha latitud,

$\rho\Pi_s$ — „ la paralage horizontal del Sol en la misma latitud,

y, por consiguiente, despreciando, como hasta aquí, los términos del segundo órden de las paralages

$$\mathcal{X}'_p = \frac{\rho\Pi_p \cos\varphi}{\cos d'_p}\cdot \sin(a'_p - \theta')$$

$$\mathcal{X}'_s = \frac{\rho\Pi_s \cos\varphi}{\cos d'_s}\cdot \sin(a'_s - \theta')$$

$$\varpi'_p = \rho\Pi_p \sin d'_p \cos\varphi . \cos(a'_p - \theta') - \rho\Pi_p \cos d'_p \sin\varphi$$

$$\varpi'_s = \rho\Pi_s \sin d'_s \cos\varphi . \cos(a'_s - \theta') - \rho\Pi_p \cos d'_s \sin\varphi$$

de donde se deduce

$$A'(\mathcal{X}'_p - \mathcal{X}'_s) = \rho\cos\varphi\left[\frac{A'\Pi_p}{\cos d'_p}.\sin(a'_p - \theta') - \frac{A'\Pi_s}{\cos d'_s}.\sin(a'_s - \theta')\right],$$

$$B'(\varpi'_p - \varpi'_s) = \rho\cos\varphi\left[B'\Pi_p \sin d'_p . \cos(a'_p - \theta') - B'\Pi_s \sin d'_s \cos(a'_s - \theta')\right] - \rho\sin\varphi(B'\Pi_p \cos d'_p - B'\Pi_s \cos d'_s);$$

y haciendo en estas espresiones

$$\frac{A'}{\cos d'_p} = A'_p ; \frac{A'}{\cos d'_s} = A'_s ; \quad B'.\sin d'_p = B'_p ; \quad B'.\sin d'_s = B'_s ; \quad \Pi_p \cos d'_p - \Pi_s \cos d'_s = M'$$

se obtiene

$$(t') = \rho.\cos\varphi.\Pi_p\left[A'_p.\sin(a'_p - \theta') + B'_p.\cos(a'_p - \theta')\right] - \rho\cos\varphi.\Pi_s\left[A'_s.\sin(a'_s - \theta') + B'_s\cos(a'_s - \theta')\right] - \rho.B'.M'.\sin\varphi.$$

En esta espresion hágase

$$\frac{A'_p}{B'_p} = \tan\Psi'_p \quad ; \quad \frac{A'_s}{B'_s} = \tan\Psi'_s$$

y será

$$(t') = \rho.B'_p.\Pi_p.\cos\varphi.\frac{\cos(\Psi'_p - a'_p + \theta')}{\cos\Psi'_p} - \rho.B'_s\Pi_s.\cos\varphi\frac{\cos(\Psi'_s - a'_s + \theta')}{\cos\Psi'_s} - \rho.B'.M'\sin\varphi;$$

y si ahora se pone

$$\Psi'_p - a'_p = N'_p ; \quad \Psi'_s - a'_s = N'_s ; \quad \frac{B'_p.\Pi_p}{\cos\Psi'_p} = \mathbf{B}'_p ; \quad \frac{B'_s\Pi_s}{\cos\Psi'_s} = \mathbf{B}'_s$$

se obtiene

$$(t') = \rho B'_p . \cos\varphi . \cos(\Theta' + N'_p) - \rho . B'_s . \cos\varphi . \cos(\Theta' + N'_s) - \rho . B' . M' . \sin\varphi .$$

$$= \rho\cos\varphi\left[B'_p \cos\Theta . \cos N'_p - B'_p \sin\Theta' . \sin N'_p - B'_s \cos\Theta' \cos N'_s + B'_s . \sin\Theta' . \sin N'_s\right] - \rho . B' . M' . \sin\varphi$$

$$= \rho\cos\varphi\left[\cos\Theta'(B'_p . \cos N'_p - B'_s . \cos N'_s) - \sin\Theta'(B'_p . \sin N'_p - B'_s . \sin N'_s)\right] - \rho . B' . M' . \sin\varphi$$

de donde suponiendo

$$B'_p . \cos N'_p - B'_s . \cos N'_s = M'_1 ; \quad B'_p . \sin N'_p - B'_s . \sin N'_s = M'_{11} ; \quad \frac{M'_{11}}{M'_1} = \tan \Psi'$$

resulta

$$(t') = -B' . M' . \rho \sin\varphi + M'_1 \rho . \cos\varphi(\cos\Theta' - \sin\Theta' . \tan \Psi')$$

$$= -B' . M' \rho \sin\varphi + \frac{M'_1}{\cos\Psi'} \rho . \cos\varphi . \cos(\Theta' + \Psi') .$$

Finalmente; como

$$\Theta = (\Theta') + \lambda$$

será

$$(t') = -B' . M' . \rho \sin\varphi + \frac{M'_1}{\cos\Psi'} \rho . \cos\varphi . \cos\left[\lambda + (\Theta') + \Psi'\right] .$$

y la hora de tiempo medio astron. de S. Fernando $\underline{H}$, del primer contacto, visto desde la superficie de la tierra, en un lugar cuya latitud geocéntrica es $\underline{\varphi}$ y su longitud oriental respecto de S. Fernando λ, es

$$H_1 = (\mathfrak{U}_1) + (t') .$$

Procediendo del mismo modo, distinguiendo con los propios caracteres con dos tildes los elementos correspondientes á las horas del último contacto visto desde el centro de la Tierra, haciendo

$$A'' = \frac{3600(a''_s - a''_p)\cos^2 d''_p}{(a''_p - a''_s)(M''_p - M''_s)\cos^2 d''_p + (d''_p - d''_s)(m''_p - m''_s)} ,$$

$$B'' = \frac{3600(d''_s - d''_p)}{(a''_p - a''_s)(M''_p - M''_s)\cos^2 d''_p + (d''_p - d''_s)(m''_p - m''_s)} ,$$

$$\frac{A''}{\cos d''_p} = A''_p ; \quad \frac{A''}{\cos d''_s} = A''_s ; \quad B'' \sin d''_p = B''_p ; \quad B'' \sin d''_s = B''_s ; \quad \Pi_p \cos d''_p - \Pi_s \cos d''_s = M'' ;$$

$$\frac{A''_p}{B''_p} = \tan \Psi''_p ; \quad \frac{A''_s}{B''_s} = \tan \Psi''_s ;$$

$$\Psi_p'' - \alpha_p'' = N_p'' ; \quad \Psi_s'' - \alpha_s'' = N_s'' ; \quad \frac{B_p'' \Pi_p}{\cos \Psi_p''} = B_p'' ; \quad \frac{B_s'' \Pi_s}{\cos \Psi_s''} = B_s'' ;$$

$$B_p'' . \cos N_p'' - B_s'' . \cos N_s'' = M_{,}'' \; ; \; B_p'' . \sin N_p'' - B_s'' . \sin N_s'' = M_{,,}'' \; ; \; \frac{M_{,,}''}{M_{,}''} = \tan \Psi''$$

y teniendo presente que

$$O'' = (O'') + \lambda$$

se obtendrá

$$(t'') = - B'' M'' \rho \sin \phi + \frac{M_{,}''}{\cos \Psi''} \rho . \cos \phi . \cos \left[\lambda + (O'') + \Psi'' \right]$$

y

$$H_2 = (H_2) + (t'').$$

Resumen para la práctica

Interpólense para de hora en hora, por el método comun, las ascensiones rectas del planeta y del sol, en las proximidades de la hora á que debe suceder la conjuncion en ascension recta; hállese la diferencia entre las ascensiones rectas del planeta y las del sol, para cada hora, escribiendo dichas diferencias en serie hasta las segundas diferencias.

Si se designa por D el último valor positivo de las diferencias entre las ascensiones rectas del planeta y las del Sol, y por t^s el intérvalo de tiempo, en segundos, que debe mediar entre la hora H á que sucede dicha diferencia y la conjuncion en ascension recta se tiene

$$o = D + x . \tfrac{1}{2}(\Delta_{-1}' + \Delta_{+1}') + x^2 \tfrac{1}{2} \Delta_0^2$$

en cuya espresion

$$x = \frac{t^s}{3600}$$

De lo que precede se deduce

$$x^2 + x \frac{\Delta_{-1}' + \Delta_{+1}'}{\Delta_0^2} + \frac{2D}{\Delta_0^2} = o$$

y haciendo

$$\frac{\Delta_{-1}' + \Delta_{+1}'}{\Delta_0^2} = p \; , \quad \frac{2D}{\Delta_0^2} = q$$

resulta

$$x^2 + px + q = o$$

de donde se deduce

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}$$

Los dos valores de x deben satisfacer á la ecuacion de que son deducidos; pero como el problema no admite mas que una solucion, es preciso investigar cual de los dos valores de X la representa. Para ello basta considerar que cuando $\underline{D}=0$ debe ser $q=0$ y $X=0$; pero como cuando $q=0$ el signo superior es el único que dá $X=0$, se sigue que la solucion del problema, que por ahora es encontrar la hora de la conjuncion en R, está dada por la ecuacion

$$x = -\tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}$$

$$= -\tfrac{1}{2}p\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right].$$

Cuando q sea positiva, hágase

$$\frac{4q}{p^2} = \sin^2\phi$$

y resultará

$$x = -p.\sin^2\tfrac{1}{2}\phi$$

$$t^s = -3600\,p.\sin^2\tfrac{1}{2}\phi.$$

Cuando q sea negativa, hágase, con independencia del signo

$$\frac{4q}{p^2} = \tan^2\phi$$

y resultará

$$x = -\tfrac{1}{2}p.\frac{\cos\phi - 1}{\cos\phi}$$

$$= \tfrac{1}{2}p.\frac{1-\cos\phi}{\cos\phi} = \tfrac{1}{2}p\,\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\phi}{\cos\phi}$$

$$= \tfrac{1}{2}p\,\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\phi\;\frac{\cos\frac{1}{2}\phi}{\cos\frac{1}{2}\phi}}{\cos\phi}$$

$$= \tfrac{1}{2}p\,\frac{\sin\phi.\tan\frac{1}{2}\phi}{\cos\phi}$$

$$= \tfrac{1}{2}p\tan\phi.\tan\tfrac{1}{2}\phi$$

$$t^s = 1800\,p.\tan\phi.\tan\tfrac{1}{2}\phi.$$

y en ambos casos

$$\mathcal{S} = H + t^s$$

atendiendo á las indicaciones de los signos

El valor de t^s se obtendrá al centésimo de segundo.

Encontrada la hora $\mathcal{S}$ se hallará $\log x$ por la expresion

$$x = \frac{\delta}{86400}$$

$$c.\ a.\ \log 86400 = 5,0634863$$

Determínese la ascension recta del planeta á la hora δ, de la serie de dia en dia por medio de la fórmula

$$\alpha_p = \alpha_{0p} + x\left[\tfrac{1}{2}(\Delta'_{-1} + \Delta'_{+1}) - \tfrac{1}{12}(\Delta^3_{-1} + \Delta^3_{+1})\right]$$
$$+ x^2\left[\tfrac{1}{2}\Delta^2_0 - \tfrac{1}{24}\Delta^4_0\right]$$
$$+ x^3 \tfrac{1}{12}\left[\Delta^3_{-1} + \Delta^3_{+1}\right]$$
$$+ x^4 \tfrac{1}{24}\Delta^4_0.$$

y la de sol, para lo que debe emplearse una fórmula igual, que no se espresa por no parecer necesario.

La igualdad de los valores de α_p y α_s sirve de comprobacion para δ.

Determínense por medio de fórmulas iguales á la anterior los valores de δ_p, δ_s, para la hora δ.

Por medio de la fórmula

$$\frac{d\alpha}{d\delta} = \tfrac{1}{24}\left[\tfrac{1}{2}(\Delta'_{-1} + \Delta'_{+1}) - \tfrac{1}{12}(\Delta^3_{-1} + \Delta^3_{+1})\right] + x.\tfrac{1}{24}\left[\Delta^2_0 - \tfrac{1}{12}\Delta^4_0\right]$$
$$+ x^2 \tfrac{1}{24}.\tfrac{1}{4}\left[\Delta^3_{-1} + \Delta^3_{+1}\right]$$
$$+ x^3 \tfrac{1}{24}.\tfrac{1}{6}.\Delta^4_0$$

determínense los movimientos horarios en ascension recta y declinacion del planeta y del Sol para la hora δ, que respectivamente se han indicado por M_p, M_s, m_p, m_s; y redúzcanse M_p y M_s á segundos de arco.

Hállense las paralages horizontales ecuatoriales Π_p, Π_s, y los semidiámetros centrales S_p, S_s, para la hora δ.

Con estos datos pueden ya determinarse los valores que dan las fórmulas

$$\tan \iota = \frac{m_p - m_s}{(M_p - M_s)\cos\delta_p}\ ;\quad u = (\delta_p - \delta_s)\cos\iota\ ;\quad \cos\omega = \frac{u}{S_p + S_s}\ ;\quad k = \frac{3600.\cos\iota}{(M_p - M_s)\cos\delta_p}\ ;$$

$$c = \delta - k.u.\tan\iota\ ;\qquad \left.\begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix}\right\} = c \pm k.u.\tan\omega.$$

Recuérdese

1.º „ que $\iota < 90$ y con el signo que resulte de la fórmula

2.º „ que u tiene el mismo signo que $(\delta_p - \delta_s)$

3.º „ que ω es siempre positivo y $\left\{\begin{matrix} < 90^\circ \\ > 90^\circ \end{matrix}\right\}$ segun que $\cos\omega$ sea $\left\{\begin{matrix} \text{positivo} \\ \text{negativo} \end{matrix}\right\}$

4.º „ que k ha de resultar forzosamente negativo.

Háganse

$$x' = \frac{H_1}{86400} \qquad x'' = \frac{H_2}{86400}$$

y con estos valores y la fórmula respectiva determínense α'_p, α'_s, δ'_p, δ'_s, para la hora H_1 y α''_p, α''_s, δ''_p, δ''_s para la hora H_2. Los movimientos horarios pueden considerarse constantes durante todo el fenómeno, lo que equivale á decir que

$$M_p = M'_p = M''_p;\ M_s = M'_s = M''_s;\ m_p = m'_p = m''_p;\ m_s = m'_s = m''_s$$

Con los valores espresados se hallarán

$$\tan Z' = \frac{\alpha'_p - \alpha'_s}{\delta'_p - \delta'_s} \cdot \cos \delta'_p \qquad \tan Z'' = \frac{\alpha''_p - \alpha''_s}{\delta''_p - \delta''_s} \cdot \cos \delta''_p$$

$$D' = \frac{\alpha'_p - \alpha'_s}{\sin Z'} \cdot \cos \delta'_p \qquad D'' = \frac{\alpha''_p - \alpha''_s}{\sin Z''} \cdot \cos \delta''_p$$

tomando á Z' positiva, menor que 180°, y en el cuadrante correspondiente al signo de $\tan Z'$; y á Z'' negativa, menor, numéricamente que 180°, y en el cuadrante que indique el signo de $\tan Z''$. Los valores $(\alpha'_p - \alpha'_s)$, $(\alpha''_p - \alpha''_s)$, se emplearán en segundos de arco; ó, lo que es lo mismo, multiplicados por 15.

Háganse

$$S_p + S_s = S.$$

Si D', D'' fuesen iguales á S las horas H_1, H_2 serían las horas exactas del primero y último contacto, referidas al centro de la Tierra.

Si no fuesen iguales determínense los valores de t', t'' en segundos de tiempo por las fórmulas

$$t' = \frac{1800(S+D')(S-D')}{(\alpha'_p - \alpha_s)(M_p - M_s)\cos^2\delta'_p + (\delta'_p - \delta'_s)(m_p - m_s)}\ ;\ t'' = \frac{1800(S+D'')(S-D'')}{(\alpha''_p - \alpha''_s)(M_p - M_s)\cos^2\delta''_p + (\delta''_p - \delta''_s)(m_p - m_s)}$$

y las horas exactas del primero y último contactos, referidos al centro de la Tierra serán respectivamente, atendiendo á los signos de t', t'', y empleando á $(\alpha'_p - \alpha'_s)$, $(\alpha''_p - \alpha''_s)$ en segundos de arco, ó sea multiplicados por 15

$$(H_1) = H_1 + t'\ ; \qquad (H_2) = H_2 + t''.$$

Hállense los valores de

$$\boldsymbol{\alpha}'_p = \alpha'_p + \frac{t'}{3600} M_p\ ;\ \boldsymbol{\alpha}'_s = \alpha'_s + \frac{t'}{3600} M_s\ ;\ \boldsymbol{\delta}'_p = \delta'_p + \frac{t'}{3600} m_p\ ;\ \boldsymbol{\delta}'_s = \delta'_s + \frac{t'}{3600} m_s\ ;$$

$$\boldsymbol{\alpha}''_p = \alpha''_p + \frac{t''}{3600} M_p\ ;\ \boldsymbol{\alpha}''_s = \alpha''_s + \frac{t''}{3600} M_s\ ;\ \boldsymbol{\delta}''_p = \delta''_p + \frac{t''}{3600} m_p\ ;\ \boldsymbol{\delta}''_s = \delta''_s + \frac{t''}{3600} m_s\ ;$$

empleando los valores de M_p M_s, en segundos de tiempo, y atendiendo á las indicaciones de los signos.

Hágase

$$A' = \frac{3600(\alpha'_s - \alpha'_p)\cos^2\delta'_p}{(\alpha'_p - \alpha'_s)(M_p - M_s)\cos^2\delta'_p + (\delta'_p - \delta'_s)(m_p - m_s)}\,; \qquad A'' = \frac{3600(\alpha''_s - \alpha''_p)\cos^2\delta''_p}{(\alpha''_p - \alpha''_s)(M_p - M_s)\cos^2\delta''_p + (\delta''_p - \delta''_s)(m_p - m_s)}\,;$$

$$B' = \frac{3600(\delta'_s - \delta'_p)}{(\alpha'_p - \alpha'_s)(M_p - M_s)\cos^2\delta'_p + (\delta'_p - \delta'_s)(m_p - m_s)}\,; \qquad B'' = \frac{3600(\delta''_s - \delta''_p)}{(\alpha''_p - \alpha''_s)(M_p - M_s)\cos^2\delta''_p + (\delta''_p - \delta''_s)(m_p - m_s)}\,;$$

$$A'_p = \frac{A'}{\cos\delta'_p}\,; \quad A'_s = \frac{A'}{\cos\delta'_s}\,; \qquad A''_p = \frac{A''}{\cos\delta''_p}\,; \quad A''_s = \frac{A''}{\cos\delta''_s}\,;$$

$$B'_p = B'\sin\delta'_p\,; \quad B'_s = B'\sin\delta'_s\,; \qquad B''_p = B''\sin\delta''_p\,; \quad B''_s = B''\sin\delta''_s\,;$$

$$\Pi_p\cos\delta'_p - \Pi_s\cos\delta'_s = M'\,; \qquad \Pi_p\cos\delta''_p - \Pi_s\cos\delta''_s = M''\,;$$

$$\frac{A'_p}{B'_p} = \tan\Psi'_p\,; \quad \frac{A'_s}{B'_s} = \tan\Psi'_s\,; \qquad \frac{A''_p}{B''_p} = \tan\Psi''_p\,; \quad \frac{A''_s}{B''_s} = \tan\Psi''_s\,;$$

$$N'_p = \Psi'_p - \alpha'_p\,; \quad N'_s = \Psi'_s - \alpha''_s\,; \qquad N''_p = \Psi''_p - \alpha''_p\,; \quad N''_s = \Psi''_s - \alpha''_s\,;$$

$$\mathbf{B}'_p = \frac{B'_p\Pi_p}{\cos\Psi'_p}\,; \quad \mathbf{B}'_s = \frac{B'_s\Pi_s}{\cos\Psi'_s}\,; \qquad \mathbf{B}''_p = \frac{B''_p\Pi_p}{\cos\Psi''_p}\,; \quad \mathbf{B}''_s = \frac{B''_s\Pi_s}{\cos\Psi''_s}\,;$$

$$\mathbf{B}'_p\cos N'_p - \mathbf{B}'_s\cos N'_s = M'_1\,; \qquad \mathbf{B}''_p\cos N''_p - \mathbf{B}''_s\cos N_s = M''_1\,;$$

$$\mathbf{B}'_p\sin N'_p - \mathbf{B}'_s\sin N'_s = M'_{11}\,; \qquad \mathbf{B}''_p\sin N''_p - \mathbf{B}''_s\sin N_s = M''_{11}\,;$$

$$\tan\Psi' = \frac{M'_{11}}{M'_1}\,; \qquad \tan\Psi'' = \frac{M''_{11}}{M''_1}\,.$$

Todos los arcos Ψ deben ser menores que 90° y con el signo de tan Ψ

Determínense los valores de

(Θ') = tiempo sid. á mediod. med. + (H_1) reducida á interv. equiv. de tpo. sid.

(Θ'') = tiempo sid. á mediod. med. + (H_2) reducida á interv. equiv. de tpo. sid.

Obtenidos estos resultados se encuentra

Hora de tpo. med. ast. de S. Fern. á que se verifica el primer contacto en un lugar, cuya latitud geoc. es φ, el log. del radio terrestre ρ y su long. orient. respecto de S. Fernando λ ---- $= (H_1) - B'.M'\rho.\sin\varphi + \frac{M'_1}{\cos\Psi'}\rho.\cos\varphi.\cos[\lambda + (\Theta') + \Psi']$

Hora de tpo. med. ast. de S. Fern. á que se verifica el último contacto en un lugar cuya latitud geocéntrica es φ, el log del radio terrestre ρ, y su longitud orient. respecto de S. Fernando λ ---- $= (H_2) - B''.M''\rho.\sin\varphi + \frac{M''_1}{\cos\Psi''}\rho.\cos\varphi.\cos[\lambda + (\Theta'') + \Psi'']$

La primera impresion del planeta sobre el disco solar se verificará en un punto que dista Z' grados del vértice boreal del sol hácia oriente (vision directa).

La última impresion del planeta sobre el disco solar se verificará en un punto que dista Z'' grados del vertice boreal del sol hácia occidente (vision directa).

Longitud geográfica respecto del merid. de S. Fernando del lugar que tiene al Sol en el zenit en el momento del primer contacto referido al centro de la Tierra $\left\{\begin{matrix}\text{occidental}\\\text{oriental}\end{matrix}\right\}$ segun que resulte con el signo $\left\{\pm\right\}$ $= (O') - a'_s$

Latitud geocéntrica del mismo lugar, $\left\{\begin{matrix}\text{boreal}\\\text{austral}\end{matrix}\right\}$ segun que resulte con el signo $\left\{\pm\right\}$ ---------- $= d'_s$

Longitud geográfica respecto del merid. de S. Fern.do del lugar que tiene al Sol en el zenit en el momento del último contacto referido al centro de la Tierra, $\left\{\begin{matrix}\text{occidental}\\\text{oriental}\end{matrix}\right\}$ segun que resulte con el signo $\left\{\pm\right\}$ --- $= (O'') - a''_s$

Latitud geocéntrica del mismo lugar, $\left\{\begin{matrix}\text{boreal}\\\text{austral}\end{matrix}\right\}$ segun que resulte con el signo $\left\{\pm\right\}$ ---------- $= d''_s$

Las latitudes geocéntricas se reducirán á geográficas sumándoles numéricamente el respectivo ángulo de la vertical.

Se sacarán en limpio estos resultados bajo la forma sig.te

Año de 1861 — Noviembre 11

Paso de Mercurio por el disco del Sol parte visible en S. Fernando

Hora de tiempo medio astronómico de S. Fernando de la ☌ en ascension recta ——— } ——— 20^h — 30^m — $47^s,5$

Para esta hora se tiene

Sol	Ascension recta	15^h — 10^m — $3^s,98$
	Movimto. horario en ascension recta	+ $2'$ — $32'',7$
	Declinacion	— $17°$ — $44'$ — $43'',1$
	Movimto. horario en declinacion	— $40'',6$
	Paralage horizontal ecuatorial	$8'',67$
	Semidiametro central	$16'$ — $12'',40$
Mercurio	Movimto. horario en ascension recta	— $3'$ — $9'',1$
	Declinacion	— $17°$ — $32'$ — $40'',4$
	Movimto. horario en declinacion	+ $1'$ $43'',8$
	Paralage horizontal ecuatorial	$12'',68$
	Semidiametro central	$4'',78$

De los elementos anteriores, y con referencia al centro de la tierra, se deduce

Primer contacto de los limbos	17^h — 40^m — 17^s	} Tpo. med. astr. de S. Fernando
Minima distancia de centros	19 — 41 — 31	
Ultimo contacto de los limbos	21 — 42 — 40	

El Sol, á las horas del primero y último contacto, se hallará en el zenit de los lugares cuyas posiciones geograficas son respectivamente

Longitud	Latitud
10°32' E. de S. Fernando	— 17°.49'
42°.47 E.	— 17.52

El primer contacto será visible en

El último contacto será visible en

Valor de la mínima distancia de centros = $11'$ — $0'',7$

El primer contacto de Mercurio con el Sol se verificará en un punto del limbo de este que dista 71°. de su vértice boreal hácia oriente (vision directa)

El último contacto de Mercurio con el Sol se verificará en un punto del limbo de este que dista 24° de su vértice boreal hácia occidente (vision directa).

Para cualquier lugar de la superficie de la Tierra, cuyo radio sea ρ la latitud geocéntrica φ y su longitud al E. de S. Fernando λ la hora de tiempo medio astronómico de S. Fernando $\left\{\begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix}\right\}$ á que se verifica el $\left\{\begin{matrix} \text{primero} \\ \text{último} \end{matrix}\right\}$ contacto será

$$H_1 = 17^h\ 40^m\ 17^s - 16^s{,}81\,.\rho \sin\varphi - 52^s{,}45\,.\rho\cos\varphi\cos\left[\lambda + 172^\circ\ 40'{,}7\right]$$

$$H_2 = 21^h\ 42^m\ 40^s + 48^s{,}05\,.\rho\sin\varphi + 26^s{,}82\,.\rho\cos\varphi\cos\left[\lambda + 12^\circ\ 22'{,}9\right].$$